yoğunluğu $\rho(x,y)$ olan bir B bölgesinin x ve y eksenlerine göre eylemsizlik momentlerinin sırasıyla

$$I_x = \int_B y^2 \rho(x,y)\, dA,\ I_y = \int_B x^2 \rho(x,y)\, dA$$

formülleri ile verildiği gösterilebilir. Benzer şekilde B nin $O(0,0)$ noktasına göre eylemsizlik momenti

$$I_O = \int_B \left(x^2 + y^2\right) \rho(x,y)\, dA$$

dir.

Örnek 17.5.3 *(x,y) noktasındaki yoğunluğu $\rho(x,y) = ky$ ile verilen $x^2 + y^2 \le a^2$ ve $0 \le y$ eşitsizlikleri ile sınırlandırılmş yarım çember biçimindeki kütlenin I_x, I_y, I_O eylemsizlik momentlerini bulunuz. Burada $0 < k$ ve $0 < a$ gerçel sayılardır.*

Çözüm: Şekil 17.5.2 de bu kütlenin şekli görünmektedir.

$$I_x = \int_B ky^3\ dA = \int_0^\pi \int_0^a kr^4 \sin^3\theta\ dr\ d\theta = \frac{ka^5}{5} \int_0^\pi \sin^3\theta\ d\theta = \frac{4ka^5}{15}$$

$$I_y = \int_B kyx^2\ dA = \frac{2ka^5}{15} \int_0^\pi \int_0^a k(r\sin\theta)(r\cos\theta)^2 r\ dr\ d\theta = \frac{2ka^5}{15}$$

$$I_O = \frac{4ka^5}{15} + \frac{2ka^5}{15} = \frac{3ka^5}{5}$$

dir. ■

17.6 UZAYDA BİR BÖLGE ÜZERİNDEN İNTEGRALLER

xyz-koordinatları ile donatılmış 3-boyutlu uzayın bir U alt kümesi kapalı bir dikdörtgenler prizmasının alt kümesi ise U ya sınırlıdır denir.

U sınırlı bir küme ve $R = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$ dikdörtgenler prizmasının alt kümesi olsun. $[a,b]$ nin bir parçalanışı $P_1 : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, $[c,d]$ nin bir parçalanışı $P_2 : c = y_0 < y_1 < ... < y_m = d$ ve $[p,q]$ nun bir parçalanışı $P_3 : p = z_0 < z_1 < ... < z_t = q$ olduğuna göre $i = 1,...,n$, $j = 1,..,m$, $k = 1,..,t$ için

$$R_{i,j,k} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

şeklindeki dikdörtgenler prizmalarının topluluğu U yu tamamen örter. Bu prizmaların topluluğuna U yu örten bir **prizmalar ağı** diyeceğiz. P kümesi U yu örten bir prizmalar ağı ise P nin U içinde kalan prizmalarının topluluğunu $I(P,U)$ ile gösterelim. $I(P,U)$ ya U nun bir **iç parçalanışı** ve P nin içinde bulunan prizmaların köşegen uzunluklarının en büyüğüne bu parçalanışın **normu** diyelim. P nin normunu $\|P\|$ ile göstereceğiz.

Tanım 17.6.1 *$f(x,y,z)$, düzlemin sınırlı bir U alt kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve P kümesi U yu örten bir prizmalar ağı olsun. $I(P,B) = \{R_i : i = 1,...,k\}$ olsun. $i = 1,..,k$ için (a_i, b_i, c_i), R_i nin herhangi bir noktası ve R_i nin hacmı ΔV_i olduğuna göre*

$$\sum_{i=1}^{k} f(a_i, b_i, c_i)\, \Delta V_i$$

*şeklindeki bir toplama f nin P parçalanışına karşılık gelen bir **Riemann toplamı** denir. Eğer $I(P,B)$ boş ise bu toplam 0 olarak tanımlanır.*

Bu tanımın daha önce iki değişkenli fonksiyonlar için verilen Riemann toplamının tanımına tamamen benzediğini okuyucu kolayca görecektir. Tanımda sadece 2 boyuttan 3 boyuta geçebilmek için gerekli uyarlamalar yapılmıştır. Okuyucu daha yüksek boyutlarda verilen bir sınırlı küme üzerinde tanımlı bir fonksiyonun bu bölge üzerinde Riemann toplamını tanımlamakta zorluk çekmeyecektir. Aşağıdaki tanım da bu benzerliği izlemektedir.

Tanım 17.6.2 $f(x,y,z)$, *uzayın sınırlı bir* U *alt kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve* L *bir gerçel sayı olsun. Verilen her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık öyle bir* $\delta > 0$ *sayısı bulunabilsin ki ,* S *sayısı* f *nin* $I(P,U)$ *iç parçalanışına karşılık gelen bir Riemann toplamı ve* $\|P\| < \delta$ *ise* $|S - L| < \varepsilon$ *olsun. Bu durumda* L *ye* f *nin* B *üzerinde* ***üç katlı integrali*** *denir ve* L *yerine*

$$\int_U f dV$$

yazılır. Eğer f *nin* U *üzerinden integrali varsa* f *ye* U *üzerinde* ***integrallenebilir*** *denir.*

İntegrallenebilir fonksiyonlar için Teorem 17.1.1 de verilen tüm özellikler uzayda verilen kümeler üzerinden alınan integrallar için de geçerlidir.

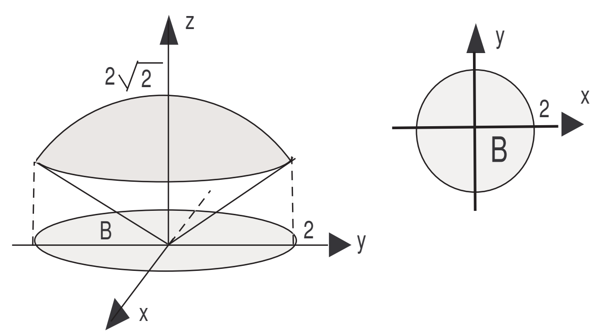
Teorem 17.6.1 B *bölgesi,* xyz- *uzayında, herhangi bir koordinat düzlemi üzerinde daha önce sözü edilen bölge türlerinden biri ve bu koordinat düzlemine dik koordinat ekseni* w *olsun.* h_1 *ve* h_2 *fonksiyonları,* B *bölgesi üzerinde tanımlı ve* B *de bulunan her* q *noktası* *için* $h_1(q) \leq h_2(q)$ *koşulunu sağlayan iki sürekli fonksiyon olsun.* U *kümesi* $p = (x,y,z) \in U$ *noktasında* $w = 0$ *koyularak elde edilen* q *noktası* B *bölgesine ait olan ve* $p = (x,y,z)$ *nin* w *koordinatının* $h_1(q) \leq w \leq h_2(q)$ *koşulunu sağladığı tüm noktaların kümesi olsun.* $f(x,y,z)$ *fonksiyonu* U *da tanımlı ve sürekli ise*

$$\int_U f dV = \int_B \left(\int_{h_1(q)}^{h_2(q)} f(x,y,z)\, dw \right) dA$$

dır.

Bundan böyle Teoremde sözü edilen türde U kümelerine uzayda bir bölge diyeceğiz.

Örnek 17.6.1 *U bölgesi* $z^2 = x^2 + y^2$ *konisinin* xy*-düzleminin üstünde kalan kısmı ile* $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ *küresi arasında kalan bölge olduğuna göre* $J = \int_U 2z\ dV$ *integralini hesaplayınız.*



Şekil 17.6.1

Çözüm: Şekil 17.6.3 de $a = 2$ alarak görüleceği gibi U bölgesini belirleyen eşitsizlikler

$$-2 \leq x \leq 2\ ,\ -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\ ,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{8 - x^2 - y^2}$$

dir. xy-düzleminde B bölgesi ilk iki eşitsizliğin belirlediği bölge ise o zaman

$$\begin{aligned} J &= \int_U 2z\ dV = \int_B \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} 2z\ dz\ dy\ dx \\ &= \int_B z^2 \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}}\ dy\ dx \\ &= \int_B \left(8-2x^2-2y^2\right)\ dy\ dx \end{aligned}$$

elde edilir. B bölgesi kutupsal koordinatlar cinsinden $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ve $0 \leq r \leq 2$ eşitsizlikleri ile ifade edilebilir. B bölgesinde $x^2+y^2=r^2$ olduğu dikkate alınarak

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(8-2r^2\right)\ r\ dr\ d\theta$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \left(4r^2 - \frac{1}{2}r^4\right)\Big|_0^2 d\theta \\ &= 8\theta\Big|_0^{2\pi} = 16\pi \end{aligned}$$

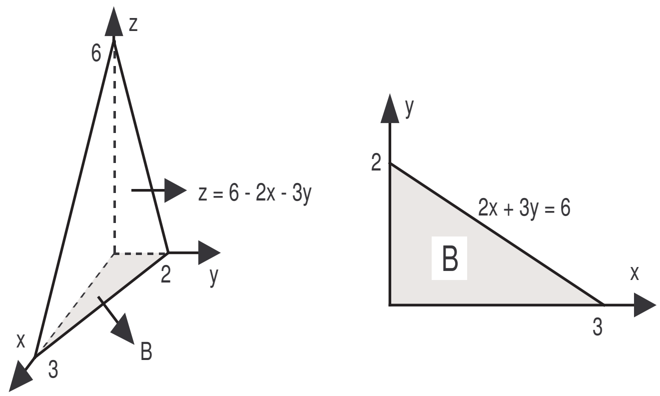
elde edilir. ■

Örnek 17.6.2 U *bölgesini belirleyen eşitsizlikler* $0 \leq x,\ 0 \leq y,$ $0 \leq z \leq 6-2x-3y$ *olduğuna göre bu bölge üzerinden* $J = \int_U (2x+3y+2z)\ dV$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: U bölgesini belirleyen ve $\int_U (2x+3y+2z)\ dV$ integralini ardışık integrale çevirmekte kullanılacak olan eşitsizlikler, Şekil 17.6.1 den de açıkça görüleceği gibi

$$0 \leq x \leq 3\ ,\ 0 \leq y \leq 2 - \frac{2x}{3}\ ,\ 0 \leq z \leq 6-2x-3y$$

dir.



Şekil 17.6.2

Böylece

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2x}{3}} \int_0^{6-2x-3y} (2x+3y+2z)\ dz\ dy\ dx \\
&= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2x}{3}} \left(2xz+3yz+z^2\right)\Big|_0^{6-2x-3y} dy\ dx \\
&= \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2x}{3}} (36-12x-18y)\ dy\ dx \\
&= \int_0^3 \left(36y-12xy-9y^2\right)\Big|_0^{2-\frac{2x}{3}} dx \\
&= \int_0^3 4\,(3-x)^2\ dx = -4\frac{(3-x)^3}{3}\Bigg|_0^3 = 36
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

17.7 HACIMLAR

Uzayın bir U bölgesi için $\int_U 1\ dV$ integrali U nun hacmını verir. Bunu görmek için U uzayın sınırlı bir bölgesi ise U nun P gibi her iç parçalanışının U yu giderek daha iyi temsil ettiğine dikkat edelim. Dolayısıyla $I\,(P, B)$ den geçen prizmaların hacımleri toplamı P nin normu küçüldükçe U nun hacmına yaklaşır. Fakat bu toplam böyle bir parçalanış için U üzerinde tanımlı $f = 1$ sürekli fonksiyonunun Riemann toplamıdır. Bu nedenle $\int_U 1\ dV = \int_U dV$ integrali U nun hacmını verir. Bundan faydalanarak bir takım katı cisimlerin hacmını hesaplayalım.

Örnek 17.7.1 *Yarıçapı $a > 0$ olan kürenin hacmını bulunuz.*

Çözüm: Yarıçapı a olan ve merkezi $(0, 0, 0)$ da olan bir küre ele alalım. Kürenin sadece xy-düzlemi üzerinde kalan kısmını düşünmemiz yeterli olacaktır. Bu bölgeye U diyecek olursak U bölgesini belirleyen eşitsizlikler

$$-a \leq x \leq a\ ,\ -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\ , 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

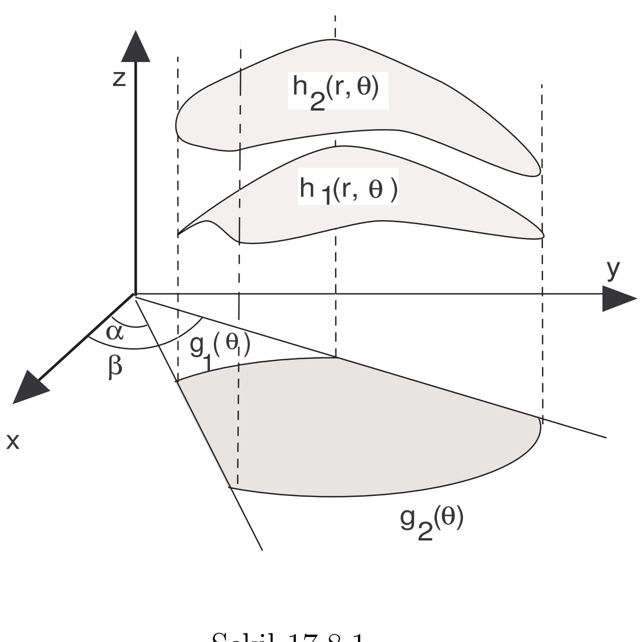
olur. xy-düzlemi üzerinde $-a \leq x \leq a$, $-\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$ eşitsizlikleri ile belirlenen B bölgesinin kutupsal koordinatlar cinsinden $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ve $0 \leq r \leq a$ eşitsizlikleri ile ifade edilebileceği dikkate alınarak kürenin hacmının yarısı olarak

$$\begin{aligned} J &= \int_U 1\ dV = \int_B \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} 1\ dz\ dy\ dx = \int_B \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ dy\ dx \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2}\ dr\ d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{-1}{3}\sqrt{(a^2 - r^2)^3}\Big|_0^a\ d\theta \\ &= \frac{1}{3}a^3\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}a^3 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan kürenin hacmı $V = \frac{4\pi}{3}a^3$ elde edilir. ■

17.8 ÜÇ KATLI İNTEGRALLERDE SİLİNDİRİK VE KÜRESEL KOORDİNATLAR

İki katlı integrallerde verilen bir bölgenin kutupsal koordinatlarla ifadesinin daha uygun olması durumunda, dik koordinatlardan kutupsal koordinatlara geçerek integralin hesabının nasıl yapılacağını gördük. Benzer şekilde uzayda verilen bir bölgenin silindirik veya küresel koordinatlarla ifadesinin daha uygun olması durumunda üç katlı integralin nasıl hesaplanabileceğini görelim.



Şekil 17.8.1

Bu amaçla uzayda silindirik koordinatlar cinsinden Şekil 17.8.1 de görüldüğü gibi

$$\alpha \leq \theta \leq \beta \ , \ g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta) \ \ , \ h_1(r,\theta) \leq z \leq h_2(r,\theta) \qquad (17.8.1)$$

eşitsizlikleri ile verilen bir U uzay bölgesini ele alalım. U bölgesinde sürekli her $f(x,y,z)$ fonksiyonu için $\int_U f \ dV$ integralinin var olduğu ve

$$\int_U f \ dV = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r,\theta)}^{h_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \ r \ dz \ dr \ d\theta \quad (17.8.2)$$

olduğu kanıtlanabilir.

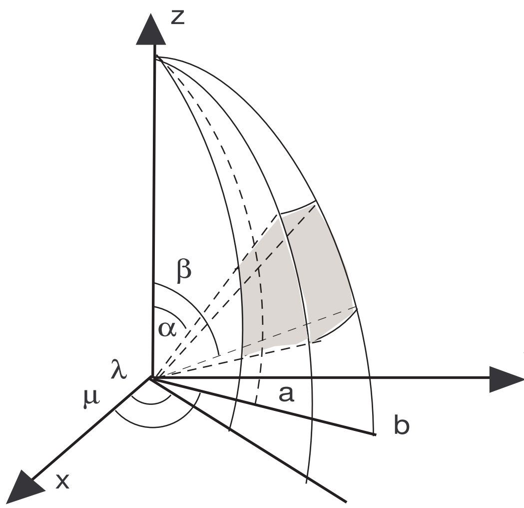
Benzer şekilde uzayda küresel koordinatlar cinsinden

$$a \leq \rho \leq b \ , \ \lambda \leq \theta \leq \mu \ , \ \alpha \leq \phi \leq \beta \qquad (17.8.3)$$

eşitsizlikleri ile verilen bir U (Şekil 17.8.2) uzay bölgesinde sürekli her $f(x,y,z)$ fonksiyonu için $\int_U f \ dV$ integralinin var olduğu ve

$$\int_U f \ dV = \int_\lambda^\mu \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi) \, \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \qquad (17.8.4)$$

olduğu kanıtlanabilir.



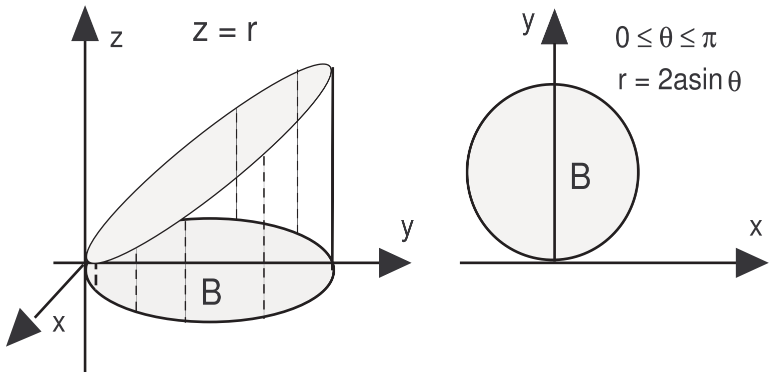
Şekil 17.8.2

Örnek 17.8.1 *xy-düzleminde yarıçapı a ve merkezi* $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ *de olan çember ile sınırlanan bölge B olduğuna göre, uzayda B nin üstünde ve* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *koni yüzeyinin altında kalan bölge U olsun. U da* $f(x, y, z) = x^2$ *olarak tanımlanan fonksiyon için* $\int_U f \; dV$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: Şekil 17.8.3 den de görüleceği gibi B bölgesi silindirik koordinatlar cinsinden

$$0 \leq \theta \leq \pi \ , \ 0 \leq r \leq 2a \sin \theta \ , \ 0 \leq z \leq r$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 17.8.3

Dolayısıyla

$$\int_U f\ dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin\theta}\int_0^{r} f\left(r\cos\theta, r\sin\theta, z\right)\ r\ dz\ dr\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin\theta}\int_0^{r} r^3\cos^2\theta\ dz\ dr\ d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin\theta} zr^3\cos^2\theta\Big|_0^r\ dr\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin\theta} r^4\cos^2\theta\ dr\ d\theta = \int_0^{\pi}\frac{r^5}{5}\cos^2\theta\Big|_0^{2a\sin\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{32a^5}{5}\sin^5\theta\cos^2\theta\ d\theta = \int_0^{\pi}\frac{32a^5}{5}\sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^2\cos^2\theta\ d\theta$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{32a^5}{5}\left(1-t^2\right)^2 t^2\ dt = \frac{512a^5}{525}$$

■

Örnek 17.8.2 *Aşağıdan $\phi = \mu$ dik konisi ve yukarıdan $\rho = a$ küresi ile sınırlandırılmış olan katı cismin hacmını bulunuz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\mu}\int_0^{a} \rho^2 \sin\phi \ d\rho \ d\phi \ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\mu} \frac{a^3}{3}\sin\phi \ d\phi \ d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} -\cos\phi|_0^{\mu} \ d\theta \\ &= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos\mu) \ d\theta = \frac{2\pi a^3}{3}(1-\cos\mu) \end{aligned}$$

■

17.9 ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki ardışık integralleri hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x (x+2y-1) \ dy \ dx$ **b)** $\displaystyle\int_1^2\int_x^{4x-1} y \ dy \ dx$

c) $\displaystyle\int_1^2\int_0^y e^{2x+y} dx \ dy$ **d)** $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^x x\sin y \ dy \ dx$

2. Aşağıdaki alıştırmalarda verilen her integral için önce ardışık integralin alındığı bölgenin şeklini çiziniz daha sonra integral sırasını değiştirerek integrali hesaplayınız.

a) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^1 e^{\sqrt{y}} \ dy \ dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} \ dy \ dx$

c) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt[3]{y}}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \ dx \ dy$ **d)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_x^{\sqrt{\pi}} \sin y^2 \ dy \ dx$