Projektif Geometride Koniklerin Denkliği:

Projektif Geometrinin en ilginç yönlerinden biri de tüm (dejenere olmayan) koniklerin (daha doğrusu onların projektif kapanışlarının) projektif olarak denk olmasıdır. (Projektif Denklik, bir projektif dönüşüm altında bir kümenin diğerine dönüşmesi olarak tanımlanır). Bu özellik, projektif geometrik kavramlar içeren (Pascal ın gizemli altıgen teoremi gibi) bazı teoremlerin ispatını kolaylaştırır. Pascal ın da, bu teoremin ispatı sırasında, Desargues ın bu özelliği biliyor olmasından yararlandığı sanılmaktadır. Biz burada, bu önermenin tam ispatını değil de, bir örnekle, bir çember, bir parabol ve bir hiperbolün (daha doğrusu bu eğrilerin projektif kapanışlarının) projektif olarak denk olduğunu göstereceğiz.

$\mathfrak{C}_1 :\ x^2 + y^2 - 1 = 0$ çemberi, $\mathfrak{C}_2 :\ x^2 - y = 0$ parabolu, $\mathfrak{C}_3 :\ x^2 - y^2 - 1 = 0$ hiperbolü olsun.

Bu eğrilerin projektif kapanışları, Eğrilerin Projektif Kapanışı başlıklı notlarda bulunmuştur.

$\overline{\mathfrak{C}_1} :\ \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ de (homojen koordinatları) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ eşitliğini sağlayan noktalardır. ($\overline{\mathfrak{C}_1} = \mathfrak{C}_1$)
$\overline{\mathfrak{C}_2} :\ \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ de (homojen koordinatları) $x^2 - yz = 0$ eşitliğini sağlayan noktalardır. ($\overline{\mathfrak{C}_2} = \mathfrak{C}_2 \cup \{[0 : 1 : 0]\}$)
$\overline{\mathfrak{C}_3} :\ \mathbb{R}\mathbf{P}^2$ de (homojen koordinatları) $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ eşitliğini sağlayan noktalardır. ($\overline{\mathfrak{C}_3} = \mathfrak{C}_3 \cup \{[1 : 1 : 0], [-1 : 1 : 0]\}$)

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad T(X, Y, Z) = (X, Z - Y, Z + Y)$ (tersinir) lineer dönüşümü olsun. $\overline{T}$ projektif dönüşümünün, $\overline{\mathfrak{C}_1}$ eğrisinin noktalarının $\overline{\mathfrak{C}_2}$ eğrisinin bir noktasına dönüştürdüğü ($X^2 - (Z - Y)(Z + Y) = X^2 + Y^2 - Z^2$ özdeşliğinden) kolayca görülür. Ayrıca, $T^{-1}(X, Y, Z) = (X, \frac{1}{2}(Z - Y), \frac{1}{2}(Y + Z))$ olduğundan benzer bir hesapla, $\overline{T^{-1}}$ projektif dönüşümünün, $\overline{\mathfrak{C}_2}$ eğrisinin noktalarının $\overline{\mathfrak{C}_1}$ eğrisinin noktalarına dönüştürdüğü görülür.

$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad S(X, Y, Z) = (Z, Y, X)$ (tersinir) lineer dönüşümü olsun. $\overline{S}$ projektif dönüşümünün $\overline{\mathfrak{C}_1}$ eğrisininin noktalarını, $\overline{\mathfrak{C}_3}$ eğrisinin noktalarına dönüştürdüğü ($Z^2 - Y^2 - X^2 = -(X^2 + Y^2 - Z^2)$ özdeşliğinden) kolayca görülür. $S^{-1} = S$ dir ve $\overline{S}$ projektif dönüşümü de ($Z^2 + Y^2 - X^2 = -(X^2 - Y^2 - Z^2)$ özdeşliğinden) $\overline{\mathfrak{C}_3}$ eğrisininin noktalarını, $\overline{\mathfrak{C}_1}$ eğrisinin noktalarına dönüştürdüğü görülür.

$\overline{S}\,\overline{T}$ projektif dönüşümü de, yukarıdakilerin sonucu olarak, $\overline{\mathfrak{C}_2}$ ile $\overline{\mathfrak{C}_3}$ arasında bir projektif denklik verecektir.

Bu denklikler geometrik olarak şöyle açıklanabilir:
$\overline{\mathfrak{C}_1} = \mathfrak{C}_1$ bir çember idi.
$\overline{\mathfrak{C}_2} = \mathfrak{C}_2 \cup \{[0 : 1 : 0]\}$ olduğundan, parabolun kapanışında, parabola bir nokta eklenerek iki ucu sonsuzda birleşip bir çember oluşur.
$\overline{\mathfrak{C}_3} = \mathfrak{C}_3 \cup \{[1 : 1 : 0], [-1 : 1 : 0]\}$ olduğundan hiperbolun kapanışında, hiperbolun dört ucu sonsuzda ikişer ikişer (aynı asimptota yaklaşan uçlar birbiri ile) iki farklı noktada birleşip yine bir çember oluşturur. Yani tüm koniklerin kapanışı bir (çember gibi) kapalı bir eğridir. Bu nedenle hepsinin kapanışları denktir.