

MT 221 GEOMETRİLER  
ARA SINAV ÇÖZÜMLER

Lambert (8)	Benzer (10)	Doğrusal (12)	Öklidyen (15)	Proclus (7)
Kazan (13)	Üst Yarı (16)	düzlem (1)	Doğrular (17)	kesişeceği (4)
kompleks (20)	postulat (3)	tanjant (19)	Playfair (6)	ekinde (14)
iki dik (9)	eşdeğer (5)	çaplar (18)	büyük (11)	tanımlar (2)

**ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİNİN KISA TARİHİ:**

MÖ. 300 yıllarında İskenderiye de yaşayan Öklid (Euclid) in yazdığı 13 ciltlik “Öğeler” adlı eserinin, birinci cildi -1- geometrisi konusundadır. Bu kitap dünyada en çok basılan matematik kitabı olup yüzyıllarca Avrupa da ders kitabı olarak kullanılmıştır. Bu ciltte, çoğu önceden bilinen ve bugün çoğu ortaokul/lise kitaplarında sözü geçen, 48 önerme ispatlanmıştır. Fakat asıl önemli olan, daha önceki matematikçilerden farklı olarak, Öklid in, bu ciltte (ve diğer ciltlerde) -2- ve kabullerini başlangıçta belirtmesidir. Daha önce yazılan kitaplarda bunlar bulunmaz. Bu kitapdaki (ve diğer kitaplardaki) doğruluğu kabul edilen önermeler iki kısma ayrılmıştır: (bugün kullanılan adları ile) (genel olan) Aksiyomlar ve (geometriye özel olan) Postulatlar. Bu ciltte 23 tanım, 5 aksiyom , 5 -3- ve 48 önerme bulunmaktadır (bazı çevirilerde bu sayılar farklıdır).

Postulatlar arasında en çok tartışılan beşinci postulatdır. Bu postulat bazı koşullarda doğruların -4- şeklindedir. Öklid, bu postulatı, ilk 28 önermenin ispatında kullanmaz. MS. 5. yüzyılda (Bizanslı) Proclus adlı bir filozof, Öklid in bu kitabı üzerine inceleme yazmış ve bu postulatın -5- ama daha basit bir şekilde ifade edilebileceğini ve bu ifadenin daha önce (daha çok astronomi üzerinde yaptıkları ile bilinen MS 1. yy da yaşamış) Ptolemy tarafından da farkedildiğini belirtmiştir. Bu eşdeğer şekline, daha sonraları 18. yy da Öklid in geometrisi üzerine bir kitap yazmış olan, İngiliz matematikçi -6- in adıyla anılır ve bugün pek çok kitapta Öklid in beşinci postulatı yerine bu eşdeğer şekli kullanılmaktadır. Proclus , ayrıca bu postulatın kabul edilmesine gerek olmadığını ve ispatlanabileceğini düşünmüştür. Ptolemy nin de böyle düşünüp beşinci postulatın bir ispatını yaptığını belirtmiş ama onun ispatındaki hatayı belirtmiştir.

Ptolemy ve -7- un bu düşüncesi, sonraki 1600 yıl boyunca pek çok matematikçi tarafından da paylaşılmış ve (bilinen) yüzlerce ünlü veya ünsüz matematikçi Öklid in beşinci postulatını ispatlamaya çalışmış, bazıları ispatladığını iddia etmiştir. Fakat her birinin “ispat” ındaki yanlışlığı, başka biri farketmiştir. Bunlar arasında, Ptolemy, Proclus, Al Haytam (Alhazen), Ömer Hayyam , Nasreddin Al-Tusi, Wallis, Legendre, Farkas (baba) Bolyai, -8- ve Saccheri en ünlüleridir. Lambert bu postulatı sağlamayan bir geometrinin varlığını göstermeye çok yaklaşmıştır. Saccheri ise, bugün bir kopyasını (internette de) bulabildiğimiz kitabında, bu postulatı ispatladığını açıkça iddia etmektedir.

Beşinci postulatı ispatladığını düşünenlerin genellikle düştüğü hata, beşinci postulatın yanlış olması durumunda, doğruluğu tartışmasız gibi görünen ama ancak beşinci postulatı kullanarak ispatlanabilen bir önerme ile çelişen sonuçlar bulmalarıdır. Bu gibi önermelerin kısa bir listesi:

1. Bir üçgenin iç açıları toplamı -9- açıdır.
2. Yöndeş açılar eşittir.
3. -10- ama eş olmayan üçgenler vardır.
4. Dikdörtgenler vardır
5. İstendiği kadar -11- alana sahip üçgen çizilebilir.
6. Pisagor Teoremi
7. Kosinüs Teoremi
8. -12- olmayan her üç noktadan bir çember geçer.

Nihayet 1829 yılında, -13- Üniversitesinden Lobachevski, Rektörü olduğu, üniversitesinin çıkardığı (İngilizce adı ile) Kazan Messenger dergisinde, Rusça yazılmış bir makalede, Öklid in beşinci postulatını sağlamayan “hayali bir geometrinin” varlığını iddia edip bu geometride bazı teoremler ispatladı. 1832 de (baba) F. Bolyai nın Matematik kitabının -14- (oğul) J. Bolyai, Latince, 26 sayfalık, başlığı “Uzayın Mutlak Geometrisi” olarak çevrilebilecek bir makale yazdı. Kendisi de Matematik profesörü olan baba Bolyai, kitap basılmadan önce, okul arkadaşı olan, Gauss a bir mektup yazıp, oğlunun yazdıkları hakkında fikrini sordu. Gauss, bu mektuba cevap olarak, (özetle) (oğul) Bolyai nin yazdıklarının doğruluğunu onayladı ama tüm bunları kendisinin yıllar önce bulduğunu ama yazmaya vakit bulamadığını belirtti. Bunlardan sonra -15- olmayan geometri daha yaygın olarak bilinmeye başladı. Fakat böyle bir geometrinin varlığı konusunda şüpheler vardı. Yani Öklid in Beşinci postulatının tersini doğru kabul edersek bir çelişki ortaya çıkmayacağına hala herkes ikna olmamıştı. Daha sonra bulunan “Modeller” ile ancak bu şüphe ortadan kaldırılabildi. Bu modellerden en basit olan üç tanesi şunlardır:

- Beltrami-Klein (kısaca Klein) modeli
- Poincare Disk modeli
- Poincare -16- Düzlem modeli

Klein modelinde noktalar kümesi, (Öklid geometrisindeki) bir çemberin içindeki noktalardır. -17-, bu çemberin (uç noktaları olmayan) kirişleridir. Uzaklık ise (Öklid anlamında) uzaklıklardan bir formül ile hesaplanır.

Poincare Disk modelinde noktalar kümesi, kompleks (karmaşık) düzlemde, birim dairenin noktalarıdır. Doğrular ise -18- ve birim çemberi dik kesen çemberlerin birim daire içinde kalan yaylarıdır (yine uç noktalar hariç). Uzaklık formülü ters hiperbolik -19- fonksiyonunu içerir.

Poincare Üst Yarı modelinde ise noktalar kümesi, -20- düzlemde reel (gerçel) eksenin yukarısında kalan noktalardır. Doğrular ise (bu yarı düzlemdeki) düşey (düz) çizgiler ve merkezi gerçel ekseninde olan yarım çemberlerdir. Uzaklık formülü, ters hiperbolik tanjant veya daha basit olarak logaritma içeren bir ifadedir.