MTS 221 GEOMETRİLER

2016-2017 GÜZ YARIYILI DÖNEM SONU SINAVI

Aşağıdaki sözcüklerin yanındaki parantezin içine, metinde konması gereken (-sayı- ile belirtilmiş) boşluğun numarasını yazınız.

projektif (7)	bölüm (20)	hariç (8)	çakışan (11)	açılar (2)
altı (4)	bir boyutlu (9)	sıralama (12)	gizemli (5)	sanal (18)
asimptot (14)	küresel (1)	denklik (10)	ortogonal (16)	Möbius (19)
merkezini (3)	cebirsel (13)	matrislerin (17)	grubu (15)	doğru (6)

ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİ, PROJEKTİF GEOMETRİ, KLEİN' İN GEOMETRİ TANIMI:

Lobachevsky ve J. Bolyai (onlardan önce Lambert) Öklidyen olmayan geometride bazı formüller buldu ve bunların küresel geometrideki formüllere benzerliğini farketti. Örneğin (yarıçapı 1 olan) -1- geometride Sinüs teoremi $\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b}$ iken, Öklidyen olmayan geometride bu formül (eğrilik -1 iken) $\frac{\sin\alpha}{\sinh a} = \frac{\sin\beta}{\sinh b}$ şeklinde oluyordu. Benzer şekilde, başka çoğu formülde de cos yerine cosh, sin yerine sinh beliriyordu ve bazı durumlarda $\pm$ farklılıkları oluyordu. Ayrıca, Öklid geometrisinde olmayan, ama küresel geometride (pek çok formülde var) olan, kürenin yarıçapına benzer bir sabit ortaya çıkıyordu. Öklidyen olmayan geometrinin (derste sözünü ettiğimiz) üç modelinden, Poincare nin modellerinde -2- göründüğü (yani Öklid in geometrisindeki) gibidir, bu özelliği nedeniyle Poincare nin modelleri "konform" dur deriz. Klein-Beltrami modeli konform değildir. Ayrıca Poincare nin her iki modelinde de (öklidyen olmayan geometrideki) çemberler, (Öklid geometrisindeki) çember şeklindedir. Klein-Beltrami modelinde ise (modeli oluşturan) dairenin -3- merkez kabul eden (öklidyen olmayan geometrideki) çemberler (Öklid geometrisindeki) çember şeklindedir.

(**Projektif Geometri**) Projektif Geometri, uzunluk , açı, alan gibi sayıların kullanılmadığı ve (düzlemdeki) tüm doğruların kesiştiği geometri olarak özetlenebilir. Pappus ün (MS IV. yy) kesişen iki doğru üzerinde alınan -4- noktadan oluşturulan üç çift doğrunun kesişim noktalarının doğrusal olacağı ile ilgili teoremi (henüz adı bilinmeyen) bu geometrinin ilk teoremi olarak kabul edilir. Projektif geometri, XVII. yy da Fransız mimar G. Desargues' in kitabı ile resmi olarak ortaya çıkmıştır. Pascal' ın (Pappus ün teoremine benzeyen) -5- altıgen teoremi de projektif geometrinin bir teoremidir. Bu kitap pek ilgi görmemiş ise de önemi çok daha sonra farkedilmiştir. XIX. yy. da projektif geometri çok incelenmiştir ve F. Klein' e göre, tüm geometrileri kapsayan bir "üst geometri" dir.

Projektif geometrinin geometrik olarak oluşturulması: (Öklid) düzleminin noktalarına (düzlemde seçilen bir) noktadan geçen her -6- için yeni bir nokta eklenir. Bu yeni noktalarda "sonsuzdaki noktalar" denir. Düzlemdeki tüm doğrulara yeni (seçilen noktadan geçen ve o doğruya paralel olan doğruya karşılık bir nokta "sonsuzdaki" nokta) eklenerek -7- doğrular elde edilir. Ayrıca sonsuzdaki noktaların tümü de bir doğru oluşturur ve " sonsuzdaki doğru" olarak adlandırılır.

Projektif geometrinin cebirsel olarak oluşturulması: Üç boyutlu uzayın ($\mathbb{R}^3$) başlangıç noktası -8- noktaları arasında tanımlanan bir denklik bağıntısına göre denklik sınıfları projektif düzlemin noktalarını oluşturur. Projektif düzlemi(n noktaları kümesini) $\mathbb{R}\mathbf{P}^2$ ile göstereceğiz. Bu küme, 3-boyutlu $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının -9- alt vektör uzaylarının kümesi ile aynıdır. Doğrular ise $\mathbb{R}^3$ ün seçilmiş iki boyutlu bir alt uzayındaki, 0 hariç, vektörlerin -10- sınıflarını kümesidir. Dolayısıyla, projektif düzlemde her doğru $\mathbb{R}^3$ ün iki-boyutlu alt vektör uzayına karşı gelir. Bu iki farklı kuruluşun aynı sonucu verdiği kolayca gösterilir. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer(doğrusal) ve

tersinir ise $\overline{T}:\mathbb{R}\mathbf{P}^2\to\mathbb{R}\mathbf{P}^2$, $\quad \overline{T}([v])=[Tv]$ olarak tanımlayıp "projektif dönüşüm" olarak adlandıracağız. Bir projektif dönüşüm ile birbiri ile -11- şekillere "eş" (veya "denk") şekiller deriz. Buna göre her üçgen (doğrusal olmayan üç nokta) denk olur (bu nedenle projektif trigonometri diye bir şey yoktur!). Her doğru parçası (farklı iki nokta) başka bir doğru parçasına eş olur. Bir doğru üzerindeki noktalar arasında -12- yoktur, doğrusal üç (farklı) nokta başka bir doğrusal (farklı) üç noktaya eşleştirilebilir. Bir doğru düzlemi ikiye ayırmaz. Düz açılar dışındaki tüm açılar eştir.
Projektif geometrinin başka bir ilginç özelliği de -13- eğrileri de kullanabilmemizdir. Aynen doğrularda olduğu gibi cebirsel eğriler de, tıpkı doğrulardaki gibi, 'sonsuzda" noktalar eklenerek "tamamlanır". Bunu ilginç bir sonucu olarak -14- olan eğriler gerçekten de 'sonsuzda kesişir"

Başka bir ilginç bir nokta da, bu oluşturmada, $\mathbb{R}$ yerine herhangi bir cismin de kullanılabilir olmasıdır. O durumda da, söylediğimiz her şey yine doğru kalacaktır. Daha da ilginç olanı, bazı ekstra (geometrik) aksiyomları da sağlayan her projektif geometrinin, bir cisimden, bu şekilde oluştuğunun da ispatlanabilmesidir.

Klein' in (Erlangen Programındaki) Geometri tanımı

Klein a göre:
Bir küme (Klein, "manifold" sözcüğünü kullanmıştır) ve onun simetrilerinin bir G alt -15- verildiğinde, geometri; bu grup altında değişmeyen özelliklerin incelenmesidir.

Değişmeyen özellikler, sayılar (uzunluk, açı, alan gibi) veya "doğrusal olmak" , "arada olmak" gibi pek çok farklı şekilde olabilir. Klein in geometri tanımına göre, bu derste sözünü ettiğimiz geometriler için gruplar aşağıda belirtilmiştir:

Öklid geometrisinde: $X=\mathbb{R}^2$, G, düzlemin; öteleme , dönme ve yansımalarını içeren en küçük alt gruptur.
$G=\{f\mid f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(x,y)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}+(a,b)\quad a,b\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in O(2)\}$
($O(2)$: 2×2 tipindeki -16- ($AA^t=I$ koşulunu sağlayan) matrislerin grubu)

Küresel geometride: $X=$ kürenin zıt noktalarının özdeşleştirilmesi ile oluşan kümedir. G ise $O(3)$ 3×3 tipindeki ortogonal ($AA^t=I$ koşulunu sağlayan) -17- grubudur.

Hiperbolik Geometride: $X=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$ (Poincare nin üst yarı düzlem modeli) ve G, -18- eksene göre yansımayı ve $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$, $(a,b,c,d\in\mathbb{R},\ ad-bc=1)$ (gerçel katsayılı -19-) dönüşümlerini içeren en küçük gruptur.

Projektif Geometride: $X=\mathbb{R}\mathbf{P}^2$, $G=\{\overline{T}\mid T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ lineer ve tersinir$\}$ grubudur.
Bu grup, 3×3 tipindeki tüm (tersinir) matrislerin bir -20- grubu olarak yazılabilir.