**Fonksiyonel Analiz Soruları 2**

$\mathfrak{R}[a,b]$ : $[a,b]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilen fonksiyonların ($\mathbb{R}$ üzerinde) vektör uzayı.

1. $n \in \mathbb{N}^+$ olsun. $\mathbb{R}^n$ nin $d_1, d_2$ ve $d_\infty$ metriklerinin her birine göre tam metrik uzay olduğunu Matematiksel Tümevarım ile gösteriniz.

2. $f(x,y)$, $\mathbb{R}^2$ de tanımlı ve sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ için $M = \sup\{\|\nabla f(x,y)\| : (x,y);\ (a,b)$ yi $(c,d)$ ye birleştiren doğru parçası üzerinde$\}$ olmak üzere, $(f(a+(c-a)t, b+(d-b)t)$ için $[0,1]$ aralığında) Zincir Kuralını ve ODT yi kullanarak, $|f(c,d) - f(a,b)| \leq M\sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$ olduğunu gösteriniz.

3. $f(x,y)$, $g(x,y)$, $\mathbb{R}^2$ de tanımlı ve sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar olsun. Eğer, bir $0 < q < 1$ sayısı için, düzlemin her noktasında $\|\nabla f\|^2 + \|\nabla g\|^2 \leq q$ ise, önceki problemi kullanarak, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ nin ($d_2$:Öklid metriğine göre) bir sıkıştırma dönüşümü olduğunu gösteriniz. $F$ nin bir sabit noktası var olduğu sonucuna varabilir miyiz? Bunu, daha büyük boyutlu Öklid uzaylarına nasıl genelleştirebiliriz?

4. $a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a < b,\ c < d$ olsun. $X = C[a,b]$ ve $d$: sup metriği ve $Y = \{f | f \in X,\ f([a,b]) \subseteq [c,d]\}$ olsun. $Y$ nin, $X$ in kapalı alt kümesi olduğunu gösterin.

5. $y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad y(2) = 0$ Başlangıç Değer Problemi (BDP) veriliyor. Bu BDP nin dört çözümünü bulunuz.

6. $f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ fonksiyonu için $y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$ Başlangıç Değer Problemi-nin, **hiç bir aralıkta** çözümü olmadığını gösteriniz.

7. $(X,d)$ bir **ultrametrik** uzay, $x_0 \in X,\ r > 0,\ y \in B_r(x_0)$ olsun. $B_r(x_0) = B_r(y)$ olduğunu gösterin.

8. * $p$ bir asal sayı, $\nu_p : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \quad \nu_p(n) = k,\ (p^k \mid n,\ p^{k+1} \nmid n)$ olsun. $\forall m,n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için ($m + n \neq 0$ ise) $\nu_p(m+n) \geq \max\{\nu_p(m), \nu_p(m)\}$ olduğunu gösterin.

9. * ($p$ bir asal sayı ise) $\forall m,n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için $\nu_p(mn) = \nu_p(m) + \nu_p(n)$ olduğunu gösterin. $p$ asal değil ise bunun yanlış olduğunu gösterin.

10. * $p$ bir asal sayı ise $\|\ \|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\left\|\frac{m}{n}\right\|_p = \begin{cases} p^{\nu_p(n)-\nu_p(m)}, & \frac{m}{n} \neq 0 \\ 0, & \frac{m}{n} = 0 \end{cases}$ olsun. Önce, $\nu_p$ nin **iyi tanımlı** olduğunu, daha sonra da, $\forall r,s \in \mathbb{Q}$ için, $\|r+s\|_p \leq \max\{\|r\|_p, \|s\|_p\}$ olduğunu gösterin.

11. * ($p$ bir asal sayı iken) $(\mathbb{Q}, \|\ \|_p)$ nin bir normlu uzay olduğunu gösterin (Bu norma, $p$-sel norm denir).

12. * ($p$ bir asal sayı iken) $\mathbb{Q}$ üzerindeki $p$-sel norm için, $\forall r, s \in \mathbb{Q}$ için $\|r+s\|_p \leq \max\{\|r\|_p, \|s\|_p\}$

13. * $p$ bir asal sayı, $d_p$, $\mathbb{Q}$ üzerindeki ($p$-sel normdan üretilen) $p$-sel metrik olsun. $(\mathbb{Q}, d_p)$ nin tam metrik uzay **olmadığını** gösterin.

14. $(X, \| \|_1)$ ve $(Y, \| \|_2)$ (aynı cisim üzerine) iki normlu uzay olsun. $\|(x,y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2$ fonksiyonunun, $X \times Y$ (vektör uzayı olduğu aşikardır) üzerinde bir norm olduğunu gösterin.

15. Her $p \geq 1$ ($p \in \mathbb{R}$) için, $\| \|_p$) nin (her $a < b,\ a, b \in \mathbb{R}$ için) $\mathfrak{R}[a,b]$ üzerinde bir norm **olmadığını** gösterin. ($\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$)

16. (Her **Riemann integrallenebilen** fonksiyonun sınırlı olduğunu hatırlayın)
$\| \|_\infty : \mathfrak{R}[a,b] \to \mathbb{R} \quad \|f\|_\infty = \sup\{|f(x) : a \leq x \leq b\}$ nin olsun.
$(\mathfrak{R}[a,b], \| \|_\infty)$ nin bir normlu uzay **olduğunu** gösterin.

17. Bir vektör uzayı, **denk normların** tanımladığı metriklerden birine göre tam ise diğerine göre de tam olduğunu gösterin.

18. *($n$ bir doğal sayı olmak üzere) $V = \mathbb{R}^n$ (veya $\mathbb{C}^n$ ) için her $p \geq 1$ ($p = \infty$ durumu da dahil) için tüm $p$-normların birbirine denk olduğunu gösteriniz.

19. Normların denkliğinin bir denklik bağıntısı olduğunu gösterin.

20. $V \neq \{\theta\}$ ise (sınırlı her lineer dönüşüm için) $\|T\| = \sup\{\|Tv\|_2 : \|v\|_1 = 1\}$ olduğunu gösteriniz.

21. $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$ olduğunu gösteriniz.

22. $(V, \| \|_1)$ ve $(W, \| \|_2)$ iki normlu uzay ve $S, T : V \to W$ iki **sınırlı ve lineer** dönüşüm olsun. O zaman $S + T$ nin de sınırlı (ve lineer) olduğunu ve $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$ olduğunu gösteriniz.

23. $(V, \| \|_1)$ ve $(W, \| \|_2)$ iki normlu uzay olsun. $\|S + T\| < \|S\| + \|T\|$ olacak şekilde $S, T : V \to W$ iki **sınırlı ve lineer** dönüşümler bulunuz. (İpucu:$V = W = \mathbb{R}$, $\| \|_1 = \| \|_2$ =mutlak değer olacak şekilde $S$ ve $T$ bulabilirsiniz.)

24. $T : V \to W$ iki normlu uzay arasında **lineer** bir dönüşüm olsun. Şunu gösterin:
$T$, $\theta_V$ noktasında sürekli ise her noktada süreklidir.

25. $(V, \| \|)$ bir normlu uzay olsun. $\forall u, v \in V$ için $|\ \|u\| - \|v\|\ | \leq \|u - v\|$ olduğunu gösteriniz.

26. $(V, \| \|)$ bir normlu uzay, $v_0 \in V$ olsun. $f : V \to \mathbb{R}, \quad f(v) = \|v - v_0\|$ fonksiyonunun ($V$ deki norm metriğine göre) düzgün sürekli olduğunu göserin.

27. $(V, \| \|)$ bir normlu uzay ve $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $V$ de vektörler olsun. $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R} \quad f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \|\sum_{i=1}^n a_i e_i\|$ fonksiyonunun ($\mathbb{F}^n$ de Öklid metriği ile) sürekli olduğunu gösterin.

28. $V$ bir vektör uzayı, $d$; $V$ üzerinde bir metrik olsun. Eğer:

$$\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall u, v, w \in V \text{ için } d(\alpha v + u, \alpha w + u) = |\alpha| d(v, w)$$

ise, $\|v\| = d(v, \theta)$ nın $V$ üzerinde bir norm olduğunu gösterin.

29. $(V, \| \;\|)$ bir normlu uzay olsun. $D_r(u) = \{v \in V : d(u, v) < r\}$ ($d$ : norm metriği) kümesinin konveks olduğunu gösterin. (Konveks küme: $K \neq \emptyset$ ve $u, v \in K$ olduğunda $\forall \lambda \in [0, 1]$ için $\lambda u + (1 - \lambda)v \in K$ oluyor ise $K$ bir konveks kümedir deriz.)

30. $(V, \| \;\|_1)$, $(W, \| \;\|_2)$, $(U, \| \;\|_3)$ normlu uzaylar ve $T : V \to W$ ve $S : W \to U$ lineer dönüşümler olsun. $S$ ve $T$ sınırlı ise $ST : V \to U$ nin de sınırlı olduğunu gösterin. $\|T\|$, $\|S\|$ ve $\|ST\|$ sayıları arasında nasıl bir ilişki vardır?

31. $(V, \| \;\|_1)$, $(W, \| \;\|_2)$ normlu uzaylar olmak üzere, $GL(V, W) = \{T | T : V \to W,\ T \text{ lineer ve sınırlı } \}$ olsun. $GL(V, W)$ kümesinin bir vektör uzayı olduğunu ve $\|T\|$ nin bu uzayda bir norm olduğunu gösteriniz.