MT 408 Fonksiyonel Analiz Ara Sınav Çözümler

1. (a) $X = C[a,b],\ d(f,g) = \left|\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx\right|$.
   $f(x)$, $[a,b]$ aralığında integrali 0 olan, **0 dan farklı** bir fonksiyon olsun (örneğin: $f(x) = 2x - (a+b)$ ya da $f(x) = x - \frac{1}{2}(a+b)$ vs.). $g(x) \equiv 0$ (sabit 0 fonksiyonu) olsun. $d(f,g) = \left|\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx\right| = 0$ olur, ama $f \neq g$ olduğu için, metrik tanımındaki ilk koşul(un bir kısmı) sağlanmıyor. O nedenle, d, X üzerinde bir metrik **değildir**.

   (b) $X = C[a,b],\ d(f,g) = \sup\{\left||f(x)| - |g(x)|\right| : a \leq x \leq b\}$.
   $f(x) = x$ ($\forall x \in [a,b]$) ve $g(x) = -x$ ($\forall x \in [a,b]$) (ya da $f \neq 0,\ g = -f$ olsun.) $d(f,g) = 0$ olur, ama $f \neq g$ olduğu için, metrik tanımındaki ilk koşul(un bir kısmı) sağlanmıyor. O nedenle, d, X üzerinde bir metrik **değildir**.

   (c) $X = \mathfrak{R}[a,b]$: $[a,b]$ aralığında Riemann (anlamında) integrallenebilen fonksiyonlar kümesi, $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$.
   $f(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & a < x \leq b \end{cases}$ ve $g \equiv 0$ (sabit 0 fonksiyonu) olsun. $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx = 0$ olur, ama $f \neq g$ olduğu için, metrik tanımındaki ilk koşul(un bir kısmı) sağlanmıyor. O nedenle, d, X üzerinde bir metrik **değildir**.

2. (a) $X = Y = C[a,b],\ d$: sup metriği, d':integral metriği olsun.
   $T : (X,d) \to (Y,d'),\ Tf = 3f^2 + f$ olsun. T nin $f_0(x) = x^3$ noktasında sürekli olduğunu gösterin.
   $\forall x \in [a,b],$ için $|f_0(x)| \leq K = (\max\{|a|,|b|\})^3$ olur.

$$\begin{aligned} d'(Tf,Tf_0) &= \int_a^b \left|(3f^2(x) + f(x)) - (3f_0^2(x) + f_0(x))\right|\,dx \\ &= \int_a^b |3(f(x) + f_0(x)) + 1|\,|f(x) - f_0(x)|\,dx \leq \int_a^b (3|f(x) + f_0(x)| + 1)\,|f(x) - f_0(x)|\,dx \end{aligned}$$

   olur. $\delta \leq 1$ kabul edelim. O zaman, $d(f,f_0) < \delta$ olduğunda,
   $\forall x \in [a,b],$ için $|f(x) - f_0(x)| < \delta$ ve $|f(x) + f_0(x)| \leq |f(x) - f_0(x)| + 2|f_0(x)| < \delta + 2K \leq 2K + 1$ olur.
   Bunun sonucunda,

$$d'(Tf,Tf_0) = \int_a^b |3(f(x) + f_0(x)) + 1||f(x) - f_0(x)|\,dx < (6K+4)\delta(b-a)$$

   olur. ($\delta \leq 1$ e ek olarak) $(6K+4)\delta(b-a) \leq \varepsilon$ olacak şekilde seçmeye çalışalım.
   $\delta \leq \min\{1, \frac{\varepsilon}{(6K+4)(b-a)}\}$ seçersek her iki koşulumuz da sağlanır.
   Bu durumda, $d(f,f_0) < \delta$ olduğunda, yukarıda gösterildiği gibi, $d'(Tf,Tf_0) < \varepsilon$ olur.

   (b) $X = Y = C[a,b],\ d$: sup metriği, d':integral metriği olsun.
   $T : (X,d) \to (Y,d'),\ \forall x \in [a,b]$ için $Tf(x) = xf(x)$ olsun. T nin $f_0(x) = x^3$ noktasında sürekli olduğunu gösterin.
   $\forall x \in [a,b],$ için $|x| \leq K = \max\{|a|,|b|\},\ |f(x) - f_0(x)| < \delta$ olur.

$$\begin{aligned} d'(Tf,Tf_0) &= \int_a^b |xf(x) - xf_0(x)|\,dx \\ &= \int_a^b |x|\,|f(x) - f_0(x)|\,dx \\ &< K\delta(b-a) \end{aligned}$$

   olur. O zaman, $d(f,f_0) < \delta$ olduğunda,

$$d'(Tf,Tf_0) = \int_a^b |x||f(x) - f_0(x)|\,dx < K\delta(b-a)$$

olur. $K\delta(b-a) \le \varepsilon$ olacak şekilde seçmeye çalışalım.
$\delta \le \frac{\varepsilon}{(b-a)K}$ seçelim.
Bunun durumda, $d(f,f_0) < \delta$ olduğunda, $d'(Tf,Tf_0) < \varepsilon$ olduğu, yukarıda gösterilmiştir.
(δ, f_0 dan bağımsız olduğu için aslında, T nin düzgün sürekli olduğu da gösterildi.)

(c) $X = Y = C[a,b]$, d : sup metriği, d':integral metriği olsun.
$T : (X,d) \to (Y,d')$, $\forall x \in [a,b]$ için $Tf(x) = 2f(x) + x$ olsun.
$d(f,g) < \delta$ olduğunda, $\forall x \in [a,b]$ için $|f(x) - g(x)| < \delta$ olur.

$$\begin{aligned} d'(f,g) &= \int_a^b |(2f(x)+x) - (2g(x)+x)|\, dx = 2\int_a^b |f(x)-g(x)|\, dx \\ &< 2\delta(b-a) \end{aligned}$$

olur. $\delta \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ seçilirse, $f,g \in X$ ve $d(f,g) < \delta$ olduğunda, $d'(Tf,Tg) < \varepsilon$ olduğu, yukarıda gösterilmiştir.

3. (a) $X = C[a,b]$, d :sup metriği olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}^+, \forall x \in [a,b]$ için $f_n(x) = \frac{x^2}{n} + 2x$ olsun. Bu dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.
Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.
($\forall n > m \ge K$ için $d(f_n, f_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $K \in \mathbb{N}$ bulmalıyız.)
Önce şunu not edelim: $M = \max\{|a|,|b|\}$ olsun. $\forall x \in [a,b]$ için $|x| \le M$ (ve bir x için eşit) olur.
$n > m \ge K$ olduğunda,

$$\begin{aligned} d(f_n,f_m) &= \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : a \le x \le b\} \\ &= \sup\{\left|\tfrac{x^2}{n} - \tfrac{x^2}{m}\right| : a \le x \le b\} = \sup\{|x^2|\left|\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m}\right| : a \le x \le b\} \\ &= M^2\left(\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{n}\right) < \tfrac{M^2}{m} \le \tfrac{M^2}{K} \end{aligned}$$

olur. $K = \left\lfloor \frac{M^2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{(\max\{|a|,|b|\})^2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ seçersek, $\frac{M^2}{K} < \varepsilon$ olur ve

$$n > m \ge K \text{ olduğunda } d(f_n,f_m) < \varepsilon$$

olduğu yukarıda gösterilmiş olur.

(b) $X = C[a,b]$, d :sup metriği olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}^+, \forall x \in [a,b]$ için $f_n(x) = x + \frac{x}{n}$ olsun. Bu dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.
Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.
($\forall n > m \ge K$ için $d(f_n, f_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $K \in \mathbb{N}$ bulmalıyız.)
Önce şunu not edelim: $M = \max\{|a|,|b|\}$ olsun. $\forall x \in [a,b]$ için $|x| \le M$ (ve bir x için eşit) olur.
$n > m \ge K$ olduğunda,

$$\begin{aligned} d(f_n,f_m) &= \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : a \le x \le b\} \\ &= \sup\{\left|\tfrac{x}{n} - \tfrac{x}{m}\right| : a \le x \le b\} = \sup\{|x|\left|\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{m}\right| : a \le x \le b\} \\ &= M\left(\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{n}\right) < \tfrac{M}{m} \le \tfrac{M}{K} \end{aligned}$$

olur. $K = \left\lfloor \frac{M}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{\max\{|a|,|b|\}}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ seçersek, $\frac{M}{K} < \varepsilon$ olur ve

$$n > m \ge K \text{ olduğunda } d(f_n,f_m) < \varepsilon$$

olduğu yukarıda gösterilmiş olur.

(c) $X = C[a,b]$, d :integral metriği olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}^+, \forall x \in [a,b]$ için $f_n(x) = x^2 - \frac{x}{n} - 1$ olsun. Bu dizinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.
Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin.

($\forall n > m \geq K$ için $d(f_n, f_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $K \in \mathbb{N}$ bulmalıyız.)

Önce şunu not edelim: $M = \max\{|a|, |b|\}$ olsun. $\forall x \in [a, b]$ için $|x| \leq M$ (ve bir x için eşit) olur.

$n > m \geq K$ olduğunda,

$$\begin{aligned} d(f_n, f_m) &= \int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|\, dx = \int_a^b \left|(x^2 - \frac{x}{n} - 1) - (x^2 - \frac{x}{m} - 1)\right| dx \\ &= \int_a^b \left|\frac{x}{n} - \frac{x}{m}\right| dx = \int_a^b |x| \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| dx \\ &\leq M(b-a)\left(\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{n}\right) < \tfrac{M(b-a)}{m} \leq \tfrac{M(b-a)}{K} \end{aligned}$$

olur. $K = \left\lfloor \frac{M(b-a)}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{\max\{|a|,|b|\}}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ seçersek, $\frac{M(b-a)}{K} < \varepsilon$ olur ve

$$n > m \geq K \text{ olduğunda } d(f_n, f_m) < \varepsilon$$

olduğu yukarıda gösterilmiş olur.

4. (a) $X = [0, 1]$, d : (kısıtlanmış) mutlak değer metriği,
$f : X \to X$, $\forall x \in [0, 1]$ için $f(x) = \sin x$ olsun. f nin bir sıkıştırma dönüşümü olduğunu varsayalım. Bir $0 < q < 1$ ve $\forall x \in [0, 1]$ için $|\sin x - \sin x'| \leq q|x - x'|$ olur. ($x \neq x'$ için) $\left|\frac{\sin x - \sin x'}{x - x'}\right|$ olur. Limit teoremlerinden, $\forall x' \in [0, 1]$ için $|f(x')| = \lim\limits_{x \to x'} \left|\frac{\sin x - \sin x'}{x - x'}\right| \leq q$ olur. $|f'(x')| = |\cos x'|$ ve x', 0 a yeterince yakın seçildiğinde $\cos x' > q$ olur. Bu çelişki, iddianın doğruluğunu ispatlar.

   (b) $X = [0, 1]$, d : (kısıtlanmış) mutlak değer metriği,
$f : X \to X$, $\forall x \in [0, 1]$ için $f(x) = 1 - \cos x$ olsun. $f'(x) = \sin x$ ve $\forall x \in (0, 1)$ için $|f'(x)| < \sin 1 = q < 1$ olur. Ortalama Değer Teoreminden, $\forall x, x' \in [0, 1]$ için $|f(x) - f(x')| = \sin c|x - x'|$ olacak şekilde bir $c \in (0, 1)$ vardır. Bu nedenle, $d(f(x), f(x')) = |\sin x - \sin x'| \leq \sin 1\, |x - x'| = \sin 1\, d(x, x')$ olur. Bu da, ($0 < q = \sin 1 < 1$ olduğu için) f nin bir sıkıştırma dönüşümü olduğunu gösterir.

   (c) $X = C[0, 1]$, d : sup metriği ve $T : X \to X$, ($\forall x \in [0, 1]$ için) $Tf(x) = \frac{1}{2}xf(x)$ olsun. $\forall f, g \in X$ için $d(Tf, Tg) = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} \left|\frac{1}{2}xf(x) - \frac{1}{2}xg(x)\right| = \frac{1}{2} \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |x||f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2} \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)| = \frac{1}{2}d(f, g)$ olur. Bu da, T nin bir sıkıştırma dönüşümü olduğunu gösterir.