

karedir. $\frac{n^2}{m+1}$ de bir tam kare olup $m(m+2)$ nin tam kare olmasını gerektirir. Halbuki

$$m^2 < m(m+2) < (m+1)^2$$

olup $m(m+2)$ tam kare olamaz gerçeği ile çelişir. ■

2.4 Alıştırılmalar

1. $a_n = 5n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) olarak tanımlanan dizinin $a_1 = 5$ ve $a_{n+1} = a_n + 5$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) olarak tanımlanabileceğini gösteriniz.
2. $a_n = n(n+2)$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) olarak tanımlanan dizinin $a_1 = 3$ ve $a_{n+1} = a_n + 2n + 3$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) olarak tanımlanabileceğini gösteriniz.
3. Aşağıdaki dizileri, f-tip dizileri şeklinde tanımlayınız.

- (a) $a_n = 7^n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)
- (b) $b_n = 3n + 7$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)
- (c) $c_n = 7$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)
- (d) $d_n = (n+1)(n+2)$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)
- (e) $e_n = 2 - (-1)^n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$)

4. Aşağıdaki dizileri, f-tip dizileri şeklinde tanımlayınız:

$$2, 4, 16, 256, \dots \text{ (yani } 2, 2^2, (2^2)^2, ((2^2)^2)^2 \text{) ve}$$

$$2, 4, 16, 65536, \dots \text{ (yani } 2, 2^2, 2^{(2^2)}, 2^{(2^2)^2} \text{)}.$$

5. Bir f-tip (a_n) dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n + na_{n-1}}{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $0 \leq a_n \leq 1$ olduğunu gösteriniz?

6. Bir f-tip (a_n) dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_{n+3} = a_{n+2} + a_n \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_{n+3} \geq (\sqrt{2})^n$ olduğunu gösteriniz?

7. (f_n) Fibonacci dizisi olmak üzere $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1$ olduğunu gösteriniz?
8. (f_n) Fibonacci dizisi olmak üzere $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\sum_{i=1}^{2n} f_i \cdot f_{i-1} = f_{2n}^2$ olduğunu gösteriniz?
9. (f_n) Fibonacci dizisi olmak üzere $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\sum_{i=0}^{2n} (-1)^{i+1} f_i = -f_{2n-1} + 1$ olduğunu gösteriniz?

10. (f_n) Fibonacci dizisi olmak üzere $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\sum_{i=1}^n \frac{f_{i-1}}{2^i} = 1 - \frac{f_{n+2}}{2^n}$$

olduğunu gösteriniz?

11. (l_n) Lucas dizisi olmak üzere $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\sum_{i=1}^n l_i^2 = l_n \cdot l_{n+1} - 2$ olduğunu gösteriniz?
12. (f_n) Fibonacci dizisi ve (l_n) Lucas dizisi olmak üzere $n \in \mathbb{Z}^+$ için $5f_{n+2} = l_{n+4} - l_n$ olduğunu gösteriniz?
13. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere
- (a) $a \mid b$ ve $c \mid d$ ise $ac \mid bd$
 - (b) $a \mid b$ ise $ac \mid bc$
 - (c) $ac \mid bc$ ise $a \mid b$
- olduğunu gösteriniz.
14. $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a \nmid bc$ ise $a \nmid b$ ve $a \nmid c$ olduğunu gösteriniz.
15. $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $31 \mid (5a + 7b + 11c)$ ise $31 \mid (21a + 17b + 9c)$ ve $31 \mid (6a + 27b + 7c)$ olduğunu gösteriniz.
16. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere n tek ise $8 \mid (n^2 - 1)$ olduğunu gösteriniz.
17. $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(a, b) = d$ ise $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$ olduğunu gösteriniz.
18. $a, b, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $[na, nb] = n[a, b]$ olduğunu gösteriniz.
19. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $d = a + bc$ ise $(d, b) = (a, b)$ olduğunu gösteriniz.
20. $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ ve $(a, b) = 1$ olmak üzere eğer $a \mid c$ ve $b \mid c$ ise $ab \mid c$ olduğunu gösteriniz.
21. $a > b \in \mathbb{Z}$ ve $(a, b) = 1$ olmak üzere $(a - b, a + b) = 1$ yada $(a - b, a + b) = 2$ olduğunu gösteriniz.
22. $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ ve $(a, b) = 1$ olmak üzere eğer $a \mid bc$ ise $a \mid c$ olduğunu gösteriniz.
23. $a \geq b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(a - b, b) = (a, b)$ olduğunu gösteriniz.
24. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(5n + 3, 7n + 4) = 1$ olduğunu gösteriniz.
25. $w + x + y = 50$ ve $w + 13x + 31y = 116$ Diophantine denklemlerinin $w, x, y \in \mathbb{Z}$ çözümlerini bulunuz.
26. $12!$ ve $15!$ sayıları asal çarpanlarına ayırınız.
27. Herbir p asal sayı için \sqrt{p} , $\sqrt[3]{p}$ ve $\log_{10} p$ irrasyonellerdir, gösteriniz.