TOPOLOJİ PROBLEMLERİ
I

1. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve $\tau = \{A \subseteq X : X \setminus A$ sayılabilir $\} \cup \{\emptyset\}$ olsun. τ nun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

2. $n \in \mathbb{N}$ için $U_n = \{n, n+1, n+2, \cdots\}$ ve $\tau = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$ olsun. τ nun $\mathbb{N}$ üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz. (Bu topoloji, $\mathbb{R}$ deki hangi topolojinin indirgenmiş (alt uzay) topolojisidir?)

3. $q \in \mathbb{Q}$ için $A_q = (q, +\infty)$, $\tau = \{A_q : q \in \mathbb{Q}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ olsun. τ, $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji midir? Cevabınızın doğruluğunu gösteriniz.

4. Üç elemanlı bir küme üzerindeki tüm topolojileri bulunuz.

5. $X \neq \emptyset$ olsun ve bir $x_0 \in X$ verilsin. $\tau = \{A \subseteq X : A = \emptyset$ veya $x_0 \in A\}$ ailesinin X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

6. $X = [0, 1)$, $\quad \tau = \{[0, k) : 0 < k \leq 1\} \cup \{\emptyset\}$ olsun. τ nun X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

7. $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{A \subset \mathbb{R} : A$ sonlu $\} \cup \{\mathbb{R}\}$ olsun. τ nun $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji olmadığını gösteriniz.

8. $X \neq \emptyset$ ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere $\tau = \{X, \emptyset, A, B\}$ olsun. τ nun X üzerinde bir topoloji olması için A ve B arasında nasıl bir ilişki olmalıdır?

9. $X, Y \neq \emptyset$ ve τ, Y üzerinde bir topoloji, $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\tau' = \{f^{-1}(U) : U \in \tau\}$ ailesinin X üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.

10. $a \in \mathbb{R}$ için $G_a = \{(x, y) : x - y > a\} \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $\tau = \{G_a : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$ ailesinin $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir topoloji olduğunu gösteriniz.(İpucu: önceki problemden yararlanabilirsiniz)

11. Açık kümelerin bir ailesinin kesişiminin açık küme olması gerekmediğini gösteren bir örnek veriniz.

12. $X \neq \emptyset$ olsun. Aşağıdakilerin eşdeğer olduğunu gösteriniz:

    (a) X sonludur.

    (b) X üzerindeki sonlu tümleyenli topoloji ile ayrık topoloji biribirine eşittir.