MT 342 TOPOLOJİ DÖNEM SONU SINAVI ÇÖZÜMLER

1. - $\mathfrak{B}' \subseteq \tau_A$ olduğunu gösterelim:
   $B' \in \mathfrak{B}'$ olsun. $\mathfrak{B}'$ nün tanımından $B' = B \cap A$ o. ş. bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır. $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ olduğu için $B \in \tau$ olur. $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ olduğu için $B' = B \cap A \in \tau_A$ bulunur.
   - $U \in \tau_A,\ x \in U$ olsun. ($x \in B',\ B' \subseteq U$ o.ş bir $B' \in \mathfrak{B}'$ bulmalıyız) $U = A \cap V$ olacak şekilde (en az) bir $V \in \tau$ vardır. $x \in V,\ V \in \tau$ ve $\mathfrak{B},\ \tau$ için bir baz olduğundan, $x \in B,\ B \subseteq V$ olacak şekilde (en az) bir $B \in \mathfrak{B}$ vardır. Bu durumda $B' = B \cap A$ için $x \in B',\ B' \subseteq V \cap A = U$ ve $B' \in \mathfrak{B}'$ olur.

2. $X \times Y$ üzerindeki çarpım topolojisini τ ile, $Y \times X$ üzerindeki çarpım topolojisini τ' ile gösterelim. $\mathfrak{B} = \{U \times V : U \in \tau_X,\ V \in \tau_Y\}$ nin τ için, $\mathfrak{B}' = \{W \times Z : W \in \tau_Y,\ Z \in \tau_X\}$ nin τ' için birer baz olduğunu biliyoruz. f nin 1-1 ve örten olduğu aşikardır. f nin $(\tau - \tau')$ sürekli ve f^{-1} in $(\tau' - \tau)$ sürekli olduğunu gösterelim. (Alternatif olarak f nin $(\tau - \tau')$ sürekli ve açık dönüşüm olduğunu da gösterebiliriz).
   f nin $(\tau - \tau')$ sürekli olduğunu göstermek için ($\mathfrak{B}',\ \tau'$ için bir baz olduğundan) her $B' \in \mathfrak{B}'$ için $f^{-1}(B') \in \tau$ olduğunu göstermek yeterlidir. $B' = W \times Z \in \mathfrak{B}', \quad (W \in \tau_Y,\ Z \in \tau_X)$ olsun.

$$\begin{aligned} f^{-1}(W \times Z) &= \{(x,y) \in X \times Y : f(x,y) \in W \times Z\} = \{(x,y) : (y,x) \in W \times Z\} \\ &= \{(x,y) : y \in W,\ x \in Z\} = Z \times W \end{aligned}$$

   $Z \in \tau_X,\ W \in \tau_Y$ olduğundan $Z \times W \in \mathfrak{B}$ olur. $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ olduğu için de $f^{-1}(W \times Z) \in \tau$ olur.
   f nin açık dönüşüm olduğunu göstermek için de yine bazlardan yararlanacağız: Her $B \in \mathfrak{B}$ için $f(B) \in \tau'$ olduğunu göstermek yeterlidir. $B = U \times V$ o.ş. $U \in \tau_X$ ve $V \in \tau_Y$ vardır.

$$f(B) = f(U \times V) = \{f(x,y) : (x,y) \in U \times V\} = \{(y,x) : x \in U,\ y \in V\} = V \times U$$

   olur. $U \in \tau_X,\ V \in \tau_Y$ olduğu için $V \times U \in \mathfrak{B}'$ olur. $\mathfrak{B}' \subseteq \tau'$ olduğundan her $B \in \mathfrak{B}$ için $f(B) \in \tau'$ olduğu gösterilmiştir. ($f^{-1}(y,x) = (x,y)$ olduğundan, f^{-1} in $(\tau' - \tau)$ sürekli olduğunu göstermek, f nin $(\tau - \tau')$ sürekli olduğunu göstermek ile hemen hemen aynıdır.)

   İkinci (daha kısa) Çözüm: f ve f^{-1} in sürekli olduğunu teoremlerle de gösterebiliriz.
   $\pi_X : X \times Y \to X,\ \pi_Y : X \times Y \to Y,\ \pi'_X : Y \times X \to X,\ \pi'_Y : Y \times X \to Y$ (izdüşümler) olsun. (Çarpım topolojileri kullanıldığında) hepsinin sürekli olduğu, derste çarpım topolojisi tanımından hemen sonra, ispatlandı. $f = \pi_Y \times \pi_X$ ve $f^{-1} = \pi'_X \times \pi'_Y$ olduğu tanımlarından görülür. Yine derste ispatlanan, çarpım topolojisinin en temel özelliği olan sürekli fonksiyonlarını "çarpımı"nın da sürekli olması özelliğinden hem f hem de f^{-1} süreklidirler.

3. (a) $\mathfrak{B} \subseteq \{B_r(x) : x \in X, r > 0\}$ aşikardır. Metrik topolojinin tanımından ($\{B_r(x) : x \in X, r > 0\}$ metrik topoloji için bir bazdır), $\{B_r(x) : x \in X, r > 0\} \subseteq \tau$ dir. bu nedenle $\mathfrak{B} \subseteq \tau$ olur.
   (b) $U \in \tau,\ x \in U$ olsun. $x \in B,\ B \subseteq U$ olacak şekilde (en az) bir $B \in \mathfrak{B}$ bulmalıyız. $\{B_r(y) : y \in X\ r > 0\}$ metrik topolojinin bir bazı olduğundan $x \in B_r(y)$ ve $B_r(y) \subseteq U$ o.ş. bir $y \in X$ noktası ve $r > 0$ sayısı vardır. $x \in B_r(y)$ olduğundan $d(x,y) < r$ dir. ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de yoğun olduğundan) $d(x,y) < q < r$ o.ş bir $q \in \mathbb{Q}$ vardır. $B = B_q(y)$ olsun. Buradan ($q > 0$ olduğundan) $x \in B$, ($q < r$ olduğundan) $B \subseteq B_r(y)$ olur. ($q \in \mathbb{Q}$ olduğundan) $B \in \mathfrak{B}$ dir ve ($B_r(y) \subseteq U$ olduğundan) $B \subseteq U$ dur.

4. (a) - $\forall x \in \mathbb{R}$, için $|x| \geq 0$ (ve $\mathbb{R}$ deki üçgen eşitsizliğinden)
   $d(f,g) = \sum_{n=1}^{4} |f(n) - g(n)| \geq 0$ olur.
   - $f = g$ ise $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)$ olacağından, $d(f,g) = 0$ olacağı aşikardır.

- $d(f,g)=\sum_{n=1}^{4}|f(n)-g(n)|=0$ olsun. $n=1,2,3,4$ için $f(n)=g(n)$ olur. Yani $h=f-g$ nin en az 4 gerçel kökü (1, 2, 3 ve 4) vardır. h derecesi en çok 3 olan bir polinom olduğundan $h=0$ yani $f=g$ olur.

(b) $d(g,f)=\sum_{n=1}^{4}|g(n)-f(n)|=\sum_{n=1}^{4}|f(n)-g(n)|=d(f,g)$

(c) (Gerçel sayılardaki üçgen eşitsizliğinden, her $f,g,h\in X$ ve her $x\in\mathbb{R}$ için) $|f(x)-h(x)|\le|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|$ doğrudur. $x=1,2,3$ ve 4 için bu eşitsizlikler yazılıp taraf-tarafa toplanırsa

$$\sum_{n=1}^{4}|f(n)-h(n)|\le\sum_{n=1}^{4}|f(n)-g(n)|+\sum_{n=1}^{4}|g(n)-h(n)|$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sol tarafı $d(f,h)$, sağ tarafı ise $d(f,g)+d(g,h)$ olduğundan, $d(f,h)\le d(f,g)+d(g,h)$ gösterilmiş olur.

5. $\varepsilon>0$ verilsin.

$$d_X(p,q)<\delta \text{ iken } d_Y(f(p),f(q))<\varepsilon$$

olacak şekilde (**Sadece** ε a bağlı bir $\delta>0$ sayısı bulmalıyız.) ($p(x,y),\ q(x',y')$ olmak üzere)

$$\begin{aligned}
d_Y(f(p),f(q)) &= |f(p)-f(q)|=|(x-2y)-(x'-2y')|=|(x-x')-2(y-y')|\\
&\le |x-x'|+2|y-y'|\le\max\{|x-x'|,|y-y'|\}+2\max\{|x-x'|,|y-y'|\}\\
&= 3\max\{|x-x'|,|y-y'|\}=3\,d_X(p,q)<3\,\delta
\end{aligned}$$

olduğundan δ sayısını, $3\delta=\varepsilon$ o.ş., yani $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ olarak seçersek ($\varepsilon>0$ olduğundan) $\delta>0$ olur ve $d_X(p,q)<\delta$ iken $d_Y(f(p),f(q))<\varepsilon$ olacağı yukarıda gösterilmiştir.

6. $F=\{x\in X: d(x,a)\le r\}$ için $F^c=\{x\in X: d(x,a)>r\}$ olur. $x\in F^c$ olsun. $d(x,a)>r$ olur. $0<r'\le r-d(x,a)$ olacak şekilde bir r' sayısı seçelim. ($r'>0$ olduğundan) $x\in B_{r'}(x)$ olur.
$B_{r'}(x)\subseteq F^c$ olduğunu gösterelim:
$y\in B_{r'}(x)$ olsun. $d(y,x)<r'$ olur.
Üçgen eşitsizliğinden $d(x,a)\le d(x,y)+d(y,a)\le r'+d(y,a)$ olur.
Buradan $d(y,a)\ge d(x,a)-r'>r$ elde edilir. Bu da $y\in F^c$ olması için (gerekli ve) yeterlidir. Böylece F^c nin açık bir küme olduğu, dolayısıyla, F nin kapalı bir küme olduğu gösterilmiş olur. (UYARI: $F=\overline{B_r(x)}$ önermesi her zaman **doğru değildir**.)

EK: İkinci (daha soyut) Çözüm:
Önce $f: X\to X\times X,\ f(x)=(a,x)$ fonksiyonunun ($\tau_X-\tau_{\text{çarpım}}$) ($\tau_X$: d metriğinin X üzerinde tanımladığı metrik topoloji) sürekli olduğunu gösterelim. $\forall U,V\in\tau_X$ için, $f^{-1}(U\times V)=\begin{cases}\emptyset & a\notin U\\ V & a\in U\end{cases}\in\tau_X$ olduğundan (ve $\{U\times V: U,V\in\tau_X\}$, $\tau_{\text{çarpım}}$ için bir baz olduğundan) f ($\tau_X-\tau_{\text{çarpım}}$) süreklidir. Derste $d: X\times X\to\mathbb{R}$ in $\tau_{\text{çarpım}}-\tau_{\text{std}}$ sürekli olduğu gösterildi. Bu iki sürekli fonksiyonun bileşkesi $g=d\circ f: X\to\mathbb{R}$, ($\tau_X-\tau_{\text{std}}$) sürekli olur. $A=(-\infty,r]$, $\mathbb{R}$ de (standart topolojiye göre) kapalı olduğundan $g^{-1}(A)$, X de (τ_X topolojisine göre) kapalıdır. Fakat $F=g^{-1}(A)$ olduğu tanımlarından aşikardır.