

MT 334 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ

1. Kompleks Sayılar

- $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için şğıdakileri gösteriniz:
 - $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2)$
 - $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Im}(z_2) + \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Re}(z_2)$
 - $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$
 - $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z)$
- $a, b \in \mathbb{R}$ ve $z, w \in \mathbb{C}$ için $\operatorname{Re}(az + bw) = a \operatorname{Re}(z) + b \operatorname{Re}(w)$ olduğunu gösteriniz.
- $\sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ olduğunu gösteriniz (ipucu: $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ eşitsizliğinden yararlanınız.)
- Aşğıdaki eşitsizlikleri sağlayan noktaları düzlemde gösteriniz:
 - $|z + i| \leq 3$
 - $|z - 4i| \geq 4$
 - $0 < |z - 2i| < 2$
- $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ ifadesinin, odakları $(0, \pm 4)$ olan bir elips olduğunu geometrik olarak açıklayınız.
- $|z - 1| = |z + i|$ denkleminin, eğimi -1 olan bir doğru olduğunu gösteriniz.
- Aşğıdaki kümeleri kompleks düzlemde gösteriniz.
 - $\operatorname{Re}(\bar{z} - i) = 2$
 - $|2z - i| = 4$
- $|z_1| \neq |z_2|$ ise $\left| \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right| \leq \frac{|z_1| + |z_2|}{||z_1| - |z_2||}$ olduğunu gösterin.
- Aşğıdakileri gösteriniz:
 - $|z| \leq 1$ ise $|\operatorname{Re}(2 + \bar{z} + z^3)| \leq 4$
 - $|z| = 2$ ise $\left| \frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \right| \leq \frac{1}{3}$
- Aşğıdakileri gösteriniz:
 - z reeldir $\rightarrow \bar{z} = z$
 - z reel veya sıfır sanaldır $\rightarrow \bar{z}^2 = z^2$
- $|z - z_0| = R$ çemberinin $|z|^2 - 2 \operatorname{Re}(z \bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$ olarak yazılabileceğini gösteriniz.
- $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolunu $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ olarak ifade ediniz.
- Aşğıdaki sayıların esas argümentlerini bulunuz ve kutupsal formda yazınız:
 - $z = \frac{i}{-2-i}$
 - $z = (\sqrt{3} - i)^6$
- $0 \leq \theta \leq 2\pi$ aralığında $|e^{i\theta} - 1| = 2$ denklemini geometrik olarak çözün.
- $|w| < 1$ olmak üzere $|z| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right| \leq 1$ önermesini ispatlayınız.
- $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ olduğunu gözönüne alarak z^{-1} i geometrik olarak açıklayınız.
- $\operatorname{Re} z_1 > 0$ ve $\operatorname{Re} z_2 > 0$ ise $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$

18. $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olsun. $|z_1| = |z_2| \rightarrow z_1 = c_1 c_2$ ve $z_2 = c_1 \bar{c}_2$ olacak şekilde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ vardır. (İpucu: $e^{i\frac{(\theta_1+\theta_2)}{2}} e^{i\frac{(\theta_1-\theta_2)}{2}} = e^{i\theta_1}$ ve $e^{i\frac{(\theta_1+\theta_2)}{2}} e^{i\frac{(\theta_1-\theta_2)}{2}} = e^{i\theta_2}$)
19. Aşağıdakileri gösteriniz:
- (a) $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ ($z \in \mathbb{C}, z \neq 1, n \in \mathbb{N}$)
- (b) $1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin \frac{(2n+1)\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$
20. $z_1 z_2 \neq 0$ ise aşağıdakileri gösteriniz:
- (a) $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1| |z_2| \Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$)
- (b) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$)
21. a) $(-16)^{\frac{1}{4}}$ b) $(-8 - 8\sqrt{3}i)^{\frac{1}{5}}$ c) $8^{\frac{1}{6}}$
22. $z_0 = -4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}$ ve $c_0 = \sqrt{2}(1+i), w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ise z_0 sayısının 3. dereceden tüm köklerinin $c_0, c_0 w, c_0 w^2$ olduğunu gösteriniz.
23. (a) $a \in \mathbb{R}$ ise $(a+i)^{\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{A} e^{i\frac{\alpha}{2}}$ olduğunu gösteriniz. (Burada $A = \sqrt{a^2+1}$ ve $\alpha = \operatorname{Arg}(a+i)$)
- (b) (a) da bulunan köklerin $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{A+a} + i \sqrt{A-a}$ olarak yazılabileceğini gösteriniz.
24. $n \in \mathbb{N}, w, 1$ in bir n -inci kökü ve $w \neq 1$ ise $1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = 0$ olduğunu gösteriniz.
25. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz:
- a) $z^5 - 2 = 0$ b) $z^3 - 1 + \sqrt{3} = 0$
26. Aşağıdaki ifadeleri en basit biçimde yazınız:
- a) $\sqrt{1 + \sqrt{i}}$ b) $\sqrt{\sqrt{-i}}$
27. $n \in \mathbb{N}, w, 1$ in bir n -inci kökü ve $w \neq 1$ olsun. $1 + 2w + 3w^2 + \dots + nw^{n-1}$ ifadesini hesaplayınız.
28. Aşağıdaki kümeleri düzlemde gösteriniz:
- a) $0 \leq \arg z \leq \pi/4, (z \neq 0)$ b) $|z-4| \geq |z|$ c) $|\operatorname{Re} z| < |z|$
- d) $|z| \leq 1, 0 \leq \arg z \leq \pi$ e) $|z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$
- f) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{2}$ g) $0 \leq \arg(z-2i) > \frac{3\pi}{2}$
- h) $1 \leq |z-2+i| \leq 2, \frac{\pi}{2} < \arg(z-2+i) < \pi$
- i) $0 < |z| < 2, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$