MT 321

Diferansiyel Formlar ve Genelleştirilmiş Stokes Teoremi ile ilgili Problemler

1. $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bir permütasyon olsun.
   $dx_{\sigma(1)} \wedge dx_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(n)} = sgn(\sigma) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$
   (sgn permütasyonun işareti) olduğunu gösteriniz (tümevarımla yapılabilir).

2. (a) $\omega = xyz\, dx \wedge dy,\ \lambda = xy^2 z\, dz$ ise $\omega \wedge \lambda = \lambda \wedge \omega$ olduğunu gösteriniz.
   (b) $\omega = ye^x\, dy,\ \lambda = uz \cos x\, dx \wedge dz \wedge du$ ise $\omega \wedge \lambda = -\lambda \wedge \omega$ olduğunu gösteriniz.

3. Her $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$ ise $\lambda \wedge \omega = (-)^{km} \omega \wedge \lambda$ olduğunu tümevarımla gösteriniz.($k+m$ üzerine tümevarım ile yapılabilir)

   İpucu: $\omega = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ve $\lambda = dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_m}$ iken yapmak yeterlidir)

4. $\omega = ye^x\, dy$ ve $\lambda = xy^2 z\, dz$ ise $d(\omega \wedge \lambda) = (d\omega) \wedge \lambda - \omega \wedge (d\lambda)$ olduğunu gösteriniz.

5. Her $f, g \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ için $d(fg) = df \wedge g + f \wedge dg$ ($=fdg + gdf$) olduğunu gösteriniz.

6. $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$ ise $d(\omega \wedge \lambda) = (d\omega) \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge (d\lambda)$ olduğunu gösteriniz.(İpucu: $\omega = f\ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$,
   $\lambda = g\ dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_m}$ iken yapmak yeterlidir.)

7. Önceki problemleri kullanarak her $w \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ için $d(d\omega) = 0$ olduğunu gösteriniz. (İpucu: $\omega = f\ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ iken yapmak yeterlidir.)

8. Tümevarım ile, her $m \in \mathbb{N}^+$ ve her $\omega_i \in \Omega^{k_i}$ için, $d\left(d\omega_1 \wedge d\omega_2 \wedge \cdots \wedge d\omega_m\right) = 0$ olduğunu gösteriniz.

9. Her $\omega \in \Omega^k$ için $d\left(d\omega \wedge \omega\right) = 0$ olduğunu gösteriniz.

10. $\sigma : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ ise ve σ değişkenlerden birine bağlı değilse, $\sigma^* \omega = 0$ olduğunu gösteriniz.

11. $F : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n$ *lineer* ise (n=2, 3 için)
    $F^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (\det F) dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_n$ olduğunu gösteriniz.

12. $\sigma : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\omega = dx \wedge dy$ ise $\sigma^*\omega = J_\sigma \; dt_1 \wedge dt_2$ (J_σ : Jakobiyan) olduğunu gösteriniz.

13. $\sigma(s,t) = (s^2, s^2 - t, st^2)$, $\omega = xy^2z \; dx$, $\lambda = xyz \; dy$ olsun. Aşağıdakileri gösteriniz:
a) $\sigma^*(\omega \wedge \lambda) = (\sigma^*\omega) \wedge (\sigma^*\lambda)$ b) $\sigma^*(d\omega) = d(\sigma^*\omega)$

14. $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferansiyellenebilir ise $F^*(\omega \wedge \lambda) = F^*\omega \wedge F^*\lambda$ olduğunu gösterin.İpucu: $\omega = f \; dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ve $\lambda = g \; dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_m}$ iken yapmak yeterlidir)

15. $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferansiyellenebilir olsun.

    (a) $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (diferensiyellenebilir 0- form) ise $F^*(dg) = dF^*g$ olduğunu gösteriniz.

    (b) $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$ olduğunu gösterin. (F^* in $\wedge$ ile sıra değiştirebilme özelliğinde yararlanın, $w = g \; dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ iken yapmak yeterlidir.)

16. $\sigma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \sigma_1(t) = (t, t^2), \sigma_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\sigma_2(x,y) = (xy, y^3, e^y)$, $\omega = zuv \; dz$ olsun. $\sigma_1^*(\sigma_2^*\omega) = (\sigma_2 \circ \sigma_1)^*\omega$ olduğunu gösteriniz.(Bu her zaman doğrudur)

17. $\sigma_1^*(\sigma_2^*\omega) = (\sigma_2 \circ \sigma_1)^*\omega$ olduğunu kullanarak her ω formu için ($\sigma_1(\mathbb{I}^k) \subseteq \mathbb{I}^m$ olduğunu kabul edip)
$\int_{\sigma_1} \sigma_2^*\omega = \int_{\sigma_2 \circ \sigma_1} \omega$ olduğunu gösteriniz.

18. $\sigma : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$,$\mu(s,t) = \sigma(t,s)$ ise her ω 2-formu için
önce $\int_\mu d\omega = -\int_\sigma d\omega$ olduğunu. Daha sonra $\int_\mu \omega = -\int_\sigma \omega$ olduğunu gösteriniz.Bunu genelleştirebilir misiniz?

19. $\omega_1 - \omega_2$ kapalı bir $(k-1)$form ise her σ k-simpleksi için $\int_{\partial\sigma} \omega_1 = \int_{\partial\sigma} \omega_2$ olduğunu gösteriniz.

20. $\partial\sigma_1 = \partial\sigma_2$ ise her ω formu için $\int_{\sigma_1} d\omega = \int_{\sigma_2} d\omega$ olduğunu gösteriniz.

21. $\sigma : \mathbb{I}^k \to \mathbb{R}^n$ bir k-simpleks $(k \geq 2)$ ve σ , $\mathbb{I}^k$ nın yüzlerinde (sınırında) sabit olsun.Her $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ için $\int_\sigma d\omega = 0$ olduğunu gösteriniz.

22. Her k-simpleks $(k \geq 1)$ σ için $\partial(\partial\sigma) = 0$ olduğunu gösteriniz.

23. $S = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = f(x,y)\}$ yüzeyi olsun ve yukarı dönük normallerle yönlendirilsin. C, S nin (S ile uyumlu olarak yönlendirilmiş) sınırı olsun. $F = g_1\vec{i} + g_2\vec{j} + g_3\vec{k}$
$\sigma(s,t) = (s,t,f(s,t)), \omega = g_1\ dx + g_2\ dy + g_3\ dz$ olsun.

   (a) $\int_S \nabla \times F \cdot n\ d\sigma = \int_\sigma d\omega$
   (b) $\int_C F \cdot dr = \int_{\partial\sigma} \omega$

   olduğunu gösteriniz.

24. (a) Her tam formun kapalı form olduğunu gösteriniz.
   (b) ω tam ise $F^*\omega$ nın da tam olduğunu gösteriniz.
   (c) ω kapalı ise $F^*\omega$ nın da kapalı olduğunu gösteriniz.
   (d) ω kapalı değil ama $F^*\omega$ kapalı olacak şekilde F ve ω bulunuz.
   (e) ω tam değil ama $F^*\omega$ tam olacak şekilde F ve ω bulunuz. (Kolay)