Möbius Şeridinin Yönlendirilemez Oluşunun İspatı:

Doğan Dönmez

$M = \{\mathbf{y}(u,v) = (\cos u(1+v\cos\frac{u}{2}), \sin u(1+v\cos\frac{u}{2}), v\sin\frac{u}{2}) : (u,v)\in\mathbb{R}\times(-1,+1)\}$ olsun.
Möbius şeridinin türevlenebilen bir yüzey olduğu :

$$U_1 = (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{3\pi}{2})\times(-1,1),\quad \mathbf{y}_1(u,v) = \mathbf{y}(u,v) = \left(\cos u\left(1+v\cos\tfrac{u}{2}\right), \sin u\left(1+v\cos\tfrac{u}{2}\right), v\sin\tfrac{u}{2}\right)$$
$$U_2 = (\pi,3\pi)\times(-1,1),\quad \mathbf{y}_2(u,v) = \mathbf{y}(u,v) = \left(\cos u\left(1+v\cos\tfrac{u}{2}\right), \sin u\left(1+v\cos\tfrac{u}{2}\right), v\sin\tfrac{u}{2}\right)$$

(düzgün, has) yamaları kullanarak görülür ($M = \mathbf{y}_1(U_1)\bigcup\mathbf{y}_2(U_2)$ olduğu kolayca görülür).

$$\mathbf{y}(u,v) = \alpha(u) + v\delta(u) \quad (\alpha(u) = \cos u\,\vec{i} + \sin u\,\vec{j},\ \delta(u) = \cos\tfrac{u}{2}\,\alpha(u) + \sin\tfrac{u}{2}\,\vec{k})$$

olduğu görülür.
Bu formül, aşağıda kullanılacak olan, $\mathbf{y}(0,0) = \mathbf{y}(2\pi,0)$ ve $\mathbf{y}_u(0,0)\times\mathbf{y}_v(0,0) = -(\mathbf{y}_u(2\pi,0)\times\mathbf{y}_v(2\pi,0))$ eşitliklerini göstermeyi kolaylaştır.

M nin yönlendirilebilen bir yüzey olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$M = \bigcup_{\alpha\in A}\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \quad \text{ve } p\in\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)\bigcap\mathbf{x}_\beta(U_\beta) \text{ ise}$$

$$(\mathbf{x}_\alpha)_u({\mathbf{x}_\alpha}^{-1}(p))\times(\mathbf{x}_\alpha)_v({\mathbf{x}_\alpha}^{-1}(p)) = \lambda((\mathbf{x}_\beta)_u({\mathbf{x}_\beta}^{-1}(p))\times(\mathbf{x}_\beta)_v({\mathbf{x}_\beta}^{-1}(p)))$$

olacak şekilde (p ye bağlı) $\lambda > 0$ sayıları var olacak şekilde $(\mathbf{x}_\alpha, U_\alpha)$ düzgün has yamaları var olacaktır. (Bu $\mathbf{x}_\alpha$ yamalarının sürekli türevlenebilen yamalar olduğunu kabul edeceğiz. Bu kabul olmadan da iddianın ispatlanabileceğini ama ispatın çok daha uzun olacağını tahmin ediyorum). Bu durumda,

$$\mathbf{n}: M\to\mathbb{R}^3,\quad \mathbf{n}(p) = \frac{(\mathbf{x}_\alpha)_u({\mathbf{x}_\alpha}^{-1}(p))\times(\mathbf{x}_\alpha)_v({\mathbf{x}_\alpha}^{-1}(p))}{||(\mathbf{x}_\alpha)_u({\mathbf{x}_\alpha}^{-1}(p))\times(\mathbf{x}_\alpha)_v({\mathbf{x}_\alpha}^{-1}(p))||} = \frac{(\mathbf{x}_\alpha)_u(u_0,v_0)\times(\mathbf{x}_\alpha)_v(u_0,v_0)}{||(\mathbf{x}_\alpha)_u(u_0,v_0)\times(\mathbf{x}_\alpha)_v(u_0,v_0)||}\quad (p = \mathbf{x}_\alpha(u_0,v_0))$$

sürekli (Yani $(\mathbf{n}\circ\mathbf{x}_\alpha)(u,v) = \frac{(\mathbf{x}_\alpha)_u(u,v)\times(\mathbf{x}_\alpha)_v(u,v)}{||(\mathbf{x}_\alpha)_u(u,v)\times(\mathbf{x}_\alpha)_v(u,v)||}$ fonksiyonları sürekli) olur.

$\mathbf{y}(u,v) = (\cos u(1+v\cos\frac{u}{2}), \sin u(1+v\cos\frac{u}{2}), v\sin\frac{u}{2})$ olmak üzere

$$f(t) = (\mathbf{y}_u(t,0)\times\mathbf{y}_v(t,0))\cdot\mathbf{n}(\mathbf{y}(t,0)) \quad \text{(skalar çarpım)}$$

olarak tanımlayalım.
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ($\mathbf{y}, \mathbf{y}_u, \mathbf{y}_v$ ve $\mathbf{n}$ sürekli olduğundan) sürekli bir fonksiyon olur.
$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}|_{U_1}$ ve $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}|_{U_2}$ düzgün has yamalar olduğu için, ($\forall t\in U_1\bigcup U_2 = (-\frac{\pi}{2}, 3\pi)$ için) $f(t)\neq 0$ olur.
Diğer taraftan $\mathbf{y}(0,0) = \mathbf{y}(2\pi,0)$ ve $\mathbf{y}_u(0,0)\times\mathbf{y}_v(0,0) = -(\mathbf{y}_u(2\pi,0)\times\mathbf{y}_v(2\pi,0))$ olduğu görülür.
($\mathbf{y}(0,0) = \mathbf{y}(2\pi,0)$ olduğundan), $\mathbf{n}(\mathbf{y}(0,0)) = \mathbf{n}(\mathbf{y}(2\pi,0))$ olur.
Dolayısıyla $f(0) = -f(2\pi)$ olur.
f nin , $[0,2\pi]$ aralığında sürekli ve $f(0) = -f(2\pi)$ olması, ama bu aralıkta 0 değerini almaması Ara Değer Teoremi ile çelişir.

Böylece, (Mobius yüzeyinin yönlendirilebilir olduğu) varsayımımızın yanlış olduğu ispatlanmış olur.