MT 321 Çalışma Soruları

1. Her $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $w \in \Omega^k(\mathbb{R}^n), \lambda \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$ ise $\lambda \wedge w = (-1)^{km} w \wedge \lambda$ olduğunu gösteriniz.

2. $w = xy^2z \ dx \in \Omega^1(\mathbb{R}^3),\ \lambda = xyz \ dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^3),\ F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ F(s,t) = (s^2, s^2 - t, st^2)$ olsun.

   (a) $F^*(dw) = d(F^*w)$ olduğunu gösteriniz.

   (b) $F^*(w \wedge \lambda) = (F^*w) \wedge (F^*\lambda)$ olduğunu gösteriniz.

3. $F :\ I^n \to \mathbb{R}^n (n \geq 1), w \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer F değişkenlerden birine bağlı değilse $F^*w = 0$ olduğunu gösteriniz.

4. $F :\ I^2 \to \mathbb{R}^2, w = dx \wedge dy$ ise $F^*w = J_F \ dt_1 \wedge dt_2$ (J_F : Jakobiyan) olduğunu gösteriniz.

5. $F^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (\det F)\, dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_n$ olduğunu gösteriniz.

6. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **Lineer** bir dönüşüm olsun.
   $F^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (\det F)\, dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_n$ olduğunu gösteriniz.

Çözümler

1. $w = f \ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},\ \lambda = g \ dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_m}$ olun.
   ($i_t \neq j_s,\ \forall (t,s) \in \{1, \cdots, k\} \times \{1, \cdots, m\}$ ve $k + m \leq n$ varsayabiliriz, aksi takdirde $w \wedge \lambda = \lambda \wedge w = 0$ olup eşitlik sağlanır.)

$$\begin{aligned}
w \wedge \lambda &= fg \ dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_m} \\
&= (-1)^k fg \ dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_m} \\
&= (-1)^{2k} fg \ dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_3} \wedge \cdots \wedge dx_{j_m} \\
&\vdots \\
&= (-1)^{km} fg \ dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_m} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = (-1)^{km} \lambda \wedge w
\end{aligned}$$

   olur.

2. (a) $dw = 2xyz \ dy \wedge dx + xy^2 \ dz \wedge dx$ olur.
   $F^*(dw) = 2s^3t^2(s^2 - t)(2s \ ds - dt) \wedge 2s \ ds + s^2(s^2 - t)^2(t^2 \ ds + 2st \ dt) \wedge 2s \ ds$
   $= -4s^4t^2(s^2 - t) \ dt \wedge ds + 4s^4(s^2 - t)^2 t \ dt \wedge ds$
   $F^*(dw) = (4s^4t(s^2 - t)^2 - 4s^4t^2(s^2 - t) \ dt \wedge ds$

$F^*w = 2s^4(s^2-t)^2t^2\ ds$

$d(F^*w) = (4s^4t(s^2-t)^2 - 4s^4t^2(s^2-t))\ dt \wedge ds = F^*(dw)$

(b) $w \wedge \lambda = x^2y^3z^2\ dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$

$F^*(w\wedge\lambda) = (s^4(s^2-t)^3s^2t^4 2s\ ds) \wedge (2s\ ds - dt)$

$F^*(w\wedge\lambda) = -2s^7(s^2-t)^3t^4\ ds \wedge dt$

$F^*w = 2s^4(s^2-t)^2t^2\ ds,$

$F^*\lambda = s^3t^2(s^2-t)(2s\ ds - dt) = 2s^4t^2(s^2-t)\ ds - s^3t^2(s^2-t)\ dt$

$(F^*w)\wedge(F^*\lambda) = 2s^4(s^2-t)^2t^2\ ds \wedge s^3t^2(s^2-t)(2s\ ds - dt) = 2s^4t^2(s^2-t)\ ds - s^3t^2(s^2-t)\ dt$

$(F^*w)\wedge(F^*\lambda) = -2s^7(s^2-t)^3t^4\ ds\wedge dt = F^*(w\wedge\lambda)$

3. $F: \ I^n \to \mathbb{R}^n (n \geq 1), w \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ olsun. O halde $w = f\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ şeklindedir. $F(t_1, t_2, \cdots, t_n) = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$ ve her bir $g_j : I^n \to \mathbb{R}$ değişkenlerden birine, örneğin t_k değişkenine bağlı olmasın.

   $F^*w = dg_1 \wedge dg_2 \wedge \cdots \wedge dg_n$ şeklindedir. Fakat (hiç bir g_j nin içinde) dt_k terimi olmadığından, bu toplamın her bir teriminde, t_j lerden biri tekrarlanmış olmalıdır, yani her bir terimi 0 olmak zorundadır. Bu nedenle $F^*w = 0$ olur.

4. $F: \ I^2 \to \mathbb{R}^2, F(t_1,t_2) = (f(t_1,t_2), g(t_1,t_2))$ olsun.

$$F^*w = df \wedge dg = \left(\frac{\partial f}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial f}{\partial t_2}dt_2\right) \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial g}{\partial t_2}dt_2\right) \tag{1}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial t_1}\frac{\partial g}{\partial t_2} - \frac{\partial f}{\partial t_2}\frac{\partial g}{\partial t_1}\right) dt_1 \wedge dt_2 = J_F\, dt_1 \wedge dt_2. \tag{2}$$

5. İspat: n üzerine tümevarım vapalım.

   - $n = 1$ için yapacak bir şey yoktur, çünki, $S_1 = \{id\}$ birim permütasyondur ve $\operatorname{sgn} id = 1$ dir.

   - Bir $n \in \mathbb{N}^+$ için iddiamızın doğru olduğunu kabul edelim. $\sigma \in S_{n+1}$ olsun.

     $\sigma(k) = n+1$ olsun.

     $\mu = \sigma \circ (\sigma(k), \sigma(k+1)) \circ (\sigma(k), \sigma(k+2)) \circ \cdots \circ (\sigma(k), \sigma(n+1))$ olsun.

     ($\circ$: bileşke. Bileşkede soldaki fonksiyon önce uygulanıyor!). ($k = n+1$ ise $\mu = \sigma$ olacak.)

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & n & n+1 \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(k-1) & \sigma(k+1) & \sigma(k+2) & \cdots & \sigma(n+1) & n+1 \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

($\{1,2,\ldots,n\}$ kümesine kısıtlamasını düşünerek) $\mu \in S_n$ kabul edebiliriz.

$\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{n-k+1}\operatorname{sgn}\mu$ olur.

$$dx_{\sigma(1)} \wedge dx_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(k)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(n+1)}$$

($dx_{\sigma(k)}$ yı hemen sağındaki ile $n-k+1$ defa yer değiştirerek en sağa getirelim)

$$= (-1)^{n-k+1}\ dx_{\sigma(1)} \wedge dx_{\sigma(2)} \wedge dx_{\sigma(k-1)} \wedge dx_{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(n+1)} \wedge dx_{\sigma(k)}$$

$$= (-1)^{n-k+1}\ dx_{\sigma(1)} \wedge dx_{\sigma(2)} \wedge dx_{\sigma(k-1)} \wedge dx_{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(n+1)} \wedge dx_{n+1}$$

$$= (-1)^{n-k+1}\ (dx_{\mu(1)} \wedge dx_{\mu(2)} \wedge \cdots \wedge dx_{\mu(n)}) \wedge dx_{n+1}$$

$$= (-1)^{n-k+1}(\operatorname{sgn}\mu)\ (dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n) \wedge dx_{n+1}$$

$$= \operatorname{sgn}\sigma\ dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dx_{n+1}$$

olur. Tümevarım ilkesinden, iddiamız ispatlanmış olur.

6. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **Lineer** bir dönüşüm olsun.

   $F^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (\det F)\, dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_n$ olduğunu gösteriniz.

   $x_j = a_{j1}t_1 + a_{j2}t_2 + \cdots + a_{jn}t_n \quad (j = 1,2,\ldots,n)$ olacak şekilde bir (a_{ij}) matrisi vardır.
   ($\det F = \det(a_{ij})$ olarak tanımlanır)

$$F^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n)$$

$$= (a_{11}dt_1 + a_{12}dt_2 + \cdots + a_{1n}dt_n) \wedge (a_{21}dt_1 + a_{22}dt_2 + \cdots + a_{2n}dt_n) \wedge$$

$$\cdots \wedge (a_{n1}dt_1 + a_{n2}dt_2 + \cdots + a_{nn}dt_n)$$

   (Dağılma özelliği kullanarak)

$$F^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}(dt_{\sigma(1)} \wedge dt_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge dt_{\sigma(n)})$$

   (daha önce gösterilen $dt_{\sigma(1)} \wedge dt_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge dt_{\sigma(n)} = \operatorname{sgn}\sigma(dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_n)$ eşitliğini kullanarak)

$$= \left(\sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}\ \operatorname{sgn}\sigma\right)(dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_n)$$

$$= (\det(a_{ij}))\, dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_n = (\det F)\, dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_n$$