

GENELLEŞTİRİLMİŞ STOKES TEOREMİNİN İSPATI

Doğan DÖNMEZ

Önce, teoremin özel bir durumda doğru olduğunu ispatlayacağız. Genel durum daha sonra ispatlanacaktır.

ÖZEL DURUM:

$\iota : \mathbb{I}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\iota(t_1, t_2, \dots, t_k) = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ (Kısaca $x_i = t_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$)) olsun.
 $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, (tüm kısmi türevleri sürekli olan) k değişkenli bir fonksiyon olmak üzere:

$\omega = f(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_k$ ($\widehat{}$ (şapka) işareti o terimin var olmadığını gösteriyor)

olsun.

$$\begin{aligned} d\omega &= (df) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_k \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge (dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_k) \\ &= (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \end{aligned}$$

olur. (Bu ι için) $\frac{\partial(f \circ \iota)}{\partial t_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \iota$ olduğundan

$$\iota^*(d\omega) = (-1)^{j-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \iota \right) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k = (-1)^{j-1} \frac{\partial(f \circ \iota)}{\partial t_j} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k$$

$$\text{Bunun sonucunda } \phi_k(\iota^*(d\omega)) = (-1)^{j-1} \frac{\partial(f \circ \iota)}{\partial t_j}$$

olur. Diferansiyel-İntegral Hesabın Temel Teoreminden:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial(f \circ \iota)}{\partial t_j}(t_1, \dots, t_j, \dots, t_k) dt_j &= (f \circ \iota)(t_1, \dots, 1, \dots, t_k) - (f \circ \iota)(t_1, \dots, 0, \dots, t_k) \\ &= f(t_1, \dots, 1, \dots, t_k) - f(t_1, \dots, 0, \dots, t_k) \end{aligned}$$

olur. Ardışık integrali hesaplarken (sınırlar sabit olduğu için istediğimiz sırada hesaplayabiliriz) önce t_j değişkenine göre integral alınırsa:

$$\begin{aligned} \int_{\iota} d\omega &= (-1)^{j-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial(f \circ \iota)}{\partial t_j}(t_1, \dots, t_j, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \\ &= (-1)^{j-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial(f \circ \iota)}{\partial t_j}(t_1, \dots, t_j, \dots, t_k) dt_j \right) dt_1 \dots \widehat{dt}_j \dots dt_k \\ &= (-1)^{j-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 (f(t_1, \dots, t_{j-1}, 1, t_{j+1}, \dots, t_k) - f(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_k)) dt_1 \dots \widehat{dt}_j \dots dt_k \end{aligned}$$

olur.

$$\partial_i = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} (v_i^1 - v_i^0) \text{ ve } v_i^\epsilon(t_1, \dots, t_{k-1}) = v(t_1, \dots, t_{i-1}, \epsilon, t_i, \dots, t_{k-1}) = (t_1, \dots, t_{i-1}, \epsilon, t_i, \dots, t_{k-1})$$

$$(\epsilon = 0, 1)$$

Bunun sonucunda (x_i sabit iken $dx_i = 0$ olduğundan) $(v_i^\epsilon)^* \omega = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ f(t_1, \dots, \epsilon, \dots, t_{k-1}) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1} & i = j \end{cases}$

($\epsilon = 0, 1$) olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \int_{\partial_i} \omega &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_{v_i^1} \omega - \int_{v_i^0} \omega \right) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_{\mathbb{I}^{k-1}} (v_i^1)^*(\omega) - \int_{\mathbb{I}^{k-1}} (v_i^0)^*(\omega) \right) = (-1)^{j-1} \left(\int_{v_j^1} \omega - \int_{v_j^0} \omega \right) \\ &= (-1)^{j-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 (f(t_1, \dots, t_{j-1}, 1, t_j, \dots, t_{k-1}) - f(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{k-1})) dt_1 \dots dt_{k-1} \\ &= (-1)^{j-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 (f(t_1, \dots, t_{j-1}, 1, t_{j+1}, \dots, t_k) - f(t_1, \dots, t_{j-1}, 0, t_{j+1}, \dots, t_k)) dt_1 \dots \widehat{dt_j} \dots dt_k \\ &= \int_i d\omega \end{aligned}$$

olur.

(Tanımından görüldüğü gibi) $\int_{\partial_i} (\omega_1 + \omega_2) = \int_{\partial_i} \omega_1 + \int_{\partial_i} \omega_2$ ve $\int_i d(\omega_1 + \omega_2) = \int_i d\omega_1 + \int_i d\omega_2$ olduğundan ω' , çok terimli (bileşenlerinin kısmi türevleri sürekli) bir $(k-1)$ form olduğunda da, yine

$$\int_{\partial_i} \omega' = \int_i d\omega' \quad (1)$$

olur.

GENEL DURUM:

$\sigma : \mathbb{I}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir singüler k -simpleks; ω , \mathbb{R}^m de, tüm bileşenlerinin tüm kısmi türevleri sürekli olan, bir $k-1$ form olsun. (i yukarıdaki k -simpleks olmak üzere) $\sigma = \sigma \circ i$ olduğu aşıkardır. $\omega' = \sigma^* \omega$ olsun. $\omega' \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^k)$ dir. Problemlerdeki $d(\sigma^* \omega) = \sigma^*(d\omega)$ ve $(\sigma \circ i)^* = i^* \circ \sigma^*$ eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} d\omega &= \int_{\mathbb{I}^k} \phi_k(\sigma^* \omega) = \int_{\mathbb{I}^k} \phi_k((\sigma \circ i)^*(d\omega)) = \int_{\mathbb{I}^k} \phi_k(i^*(\sigma^*(d\omega))) = \int_{\mathbb{I}^k} \phi_k(i^*(d(\sigma^* \omega))) \\ &= \int_{\mathbb{I}^k} \phi_k(i^*(d\omega')) = \int_i d\omega' \end{aligned} \quad (2)$$

bulunur. Her $1 \leq i \leq k$ ve $\epsilon = 0, 1$ için $\sigma_i^\epsilon = \sigma \circ v_i^\epsilon$ olduğu (tanımlarından) görülür. Bu nedenle, yukarıda gösterildiği gibi, her $1 \leq i \leq k$ ve $\epsilon = 0, 1$ için

$$\int_{\sigma_i^\epsilon} \omega = \int_{\mathbb{I}^{k-1}} \phi_{k-1}((\sigma \circ v_i^\epsilon)^* \omega) = \int_{\mathbb{I}^{k-1}} \phi_{k-1}((v_i^\epsilon)^*(\sigma^* \omega)) = \int_{v_i^\epsilon} \sigma^* \omega = \int_{v_i^\epsilon} \omega'$$

olur. Bundan dolayı

$$\int_{\partial \sigma} \omega = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_{\sigma_i^1} \omega - \int_{\sigma_i^0} \omega \right) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_{v_i^1} \omega' - \int_{v_i^0} \omega' \right) = \int_{\partial_i} \omega' \quad (3)$$

elde edilir. (ω' m bileşenlerinin kısmı türevleri sürekli olduğu için) (1), (2) ve (3) eşitliklerinden:

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega$$

olduğunun ispatı tamamlanmış olur.