

MT242 Analiz IV
Final Sınavı - 26 Mayıs 2005
Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ

Öğrenci No :

Adı Soyadı :

İmza:

SORULAR

1. (12 Puan) $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ de türevlenebilir ve $[0, \infty)$ da sürekli bir fonksiyon olsun. $f(0) = 0$ ve f' monoton artan bir fonksiyon ise $x \in (0, \infty)$ için $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ olarak tanımlanan g fonksiyonunun monoton artan olduğunu gösteriniz.

2. (12 Puan) $n \geq 2$ bir pozitif tam sayı olsun. $p(x) = 1 - 4nx + n(n-1)x^{n-1} + n(n+1)x^n$ polinomunun $(0, 1)$ aralığında bir kökü olduğunu kanıtlayınız. (Y.G. $g(x) = x - 2nx^2 + (n-1)x^n + nx^{n+1}$ fonksiyonuna Rolle Teoremi uygulayınız.)

3. (12 Puan) $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu türevlenebilir ve $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) + g'(x)) = L \in \mathbb{R}$ olsun. $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$ olduğunu gösteriniz. (Y.G. $g(x) = \frac{e^x g(x)}{e^x}$ dir.)

4.

- (a) (6 Puan) $x \in [0, \infty)$ için $g_n(x) = \frac{x}{x+n}$ olsun. $x \in [0, \infty)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$ dir. Bu yakınsaklık düzgün müdür? (Y.G. $x_n = n$ almırsa ne olur?)

- (b) (6 Puan) $x \in [0, \infty)$ için $g_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ olsun. $x \in [0, \infty)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 0$ dir. Bu yakınsaklık düzgün müdür? (Y.G. $g_n(x)$ nin $[0, \infty)$ daki maksimumu nedir?)

5.

(a) (6 Puan) Sürekli fonksiyonlar için ara değer teoremini ifade ediniz.

(b) (6 Puan) $1 < n \in \mathbb{N}$ bir tek pozitif tam sayı, ve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + 1$$

olsun. f nin $(-2, 0)$ da bir kökü olduğunu gösteriniz.