MT 241 ANALIZ III

Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ

11 Kasım 2004

Öğrenci No:

Adı Soyadı :

Aşağıda verilen önermelerin bilindiğini varsayarak soruları cevaplayınız. Başarılar.

a **)** $b \in \mathbb{R}$, $0 < b$ ve $1 \neq b$ olsun ve $r, s \in \mathbb{Q}$ ve $0 < r < s$ ise $\dfrac{b^r - 1}{r} < \dfrac{b^s - 1}{s}$ dir.

b **)** a_n, b_n iki dizi, $n \in \mathbb{N}$ için $b_n \in (0, \infty)$, $b_n < b_{n+1}$ ve $\lim b_n = \infty$ olsun.

$$\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$$

ise

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L$$

dir.

c **)** $x \in \mathbb{R}$, $0 < x$ ise $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ dir.

SORULAR

1. a. $n \in \mathbb{N}$ ise $0 < \sqrt[n]{2} - 1 < \frac{1}{n}$ olduğunu gösteriniz.

   b. $\varepsilon > 0$ verilsin. $N \leq n \in \mathbb{N}$ olduğunda $\left|\sqrt[n]{2} - 1\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ bulunuz.

   c. $\lim \sqrt[n]{2}$ var mıdır varsa nedir?

2. $\phi \neq S \subseteq \mathbb{R}$ ve $0 < a \in \mathbb{R}$ sabit ise aS $=\{as : s \in S\}$ olarak tanımlanır. S alttan sınırlı ise aS nin alttan sınırlı ve

$$\inf(aS) = a \inf S$$

   olduğunu kanıtlayınız.

3. $a_n \in (0, \infty)$ bir dizi olsun. $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}$ ise $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$ olduğunu kanıtlayınız.

4. $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} - \ln n$ olsun. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

   a. $n \in \mathbb{N}$ ise $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ dir.

   b. $n \in \mathbb{N}$ ise $0 < a_n$ dir.

   c. $n \in \mathbb{N}$ ise $a_{n+1} < a_n$ dir.

   d. (a_n) yakınsaktır.