

MT241 Analiz III 1. Arasınav

22 KASIM 1999

Öğrenci No :

Name _____

Soruların cevaplarını, soru kağıdı üzerinde her sorunun hemen altında cevap için ayrılan yere yazınız. Bir cevap için ayrılan yerin dışına yazılan cevaba ilişkin karalamalar geçersiz sayılacaktır. Aşağıda verilen (i)-(iii) önermelerinin bilindiğini varsayarak soruları cevaplayınız.

i) $0 < x \in \mathbb{R}, 0 < r \in \mathbb{Q}$ olsun. $1 < r$ ise $1 + rx < (1 + x)^r$ ve $r < 1$ ise $(1 + x)^r < 1 + rx$ dir.

ii) Terimleri pozitif olan bir (x_n) dizisi için $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1$ ise $\lim x_n = 0$ dir.

iii) $n \in \mathbb{N}$ için $(1 + \frac{1}{n})^n < 3$ dir.

1. $\lim \frac{1}{n} = 0$ olduğunu kanıtlayan aşağıdaki ispatı eksiklerini tamamlayınız.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + \dots$ koyalım.

$n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq N \Rightarrow n > \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + \dots > \dots \Rightarrow \frac{1}{n} < \dots$

O halde $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq N$ ise $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ olur. Böylece $\dots\dots\dots$ olduğu görülür.

2. (x_n) dizisi $x_n = \sqrt[n]{2}$ olarak tanımlanan dizi olsun. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $1 < x_n < 1 + \frac{1}{n}$ dir.

b) $\lim x_n = 1$ dir.

3. (x_n) dizisi

$$x_1 = \sqrt{12} \text{ ve } n \geq 1 \text{ için } x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}$$

olarak tanımlanan dizi olsun. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < x_n < 4$ dür. (Tümevarım kullanınız.)

b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq x_{n+1}$ dir. (Y.G. $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 12 + x_n - x_n^2 = (4 - x_n)(3 + x_n)$ dir).

c) (x_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim x_n = 4$ dür.

4. $0 < x \in \mathbb{R}$ ve $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ olsun (x_n) dizisinin monoton artan olduğunu kanıtlayınız. (x_n) dizisi yakınsak mıdır? Neden?(Y.G. $x = \frac{1}{n+1}$ ve $r = \frac{n+1}{n}$ ile (i) yi kullanınız).

5. $a \in \mathbb{R}$ için (x_n) dizisi $x_n = \frac{n!(1 + \sqrt[n]{2}) + a^n}{n!}$ olarak tanımlanan dizi olsun. (x_n) dizisinin limitini hesaplayınız.