MT241 Analiz III, 13 Kasım 2000

Öğrenci No :
Adı Soyadı :

Aşağıda verilen önermelerin bilindiğini varsayarak soruları cevaplayınız. Soruların cevaplarını, her sorunun hemen altında ayrılan yere yazınız. Başka yerlere veya kağıtlara yazılan cevaplar kesinlikle okunmayacaktır. Başarılar.

α) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e$ dir.

β) $y \in \mathbb{R}$, $0 < y$ ve $1 < r \in \mathbb{Q}$ ise $1 + ry < (1+y)^r$ dir.

γ) $x \in \mathbb{R}$, $0 < x$ ise $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ dir.

SORULAR

1. $x_n = \sqrt[n]{n}$ dizisi verilsin aşağıdakileri kanıtlayınız.

   (a) $1 \leq \sqrt{n} < \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ dir.

   (b) $\lim n^{\frac{1}{2n}} = 1$

   (c) $\lim x_n = 1$.

2. (x_n) dizisi

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$$

olarak tanımlanan dizi olsun. Aşağıdakileri önermeleri kanıtlayınız.

   (a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} < x_n$ dir.

(b) Her $k \in \mathbb{N}$ için $.\ln \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{k}$ dir. O halde $\ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + ... + \ln \frac{n+1}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ dir.

(c) Her $n \in \mathbb{N}$ için $.0 \leq x_n$.dir.

(d) (x_n) dizisi yakınsaktır.

3. $\phi \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ alttan sınırlı kümeler ise $A + B$ nin de alttan sınırlı ve

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

olduğunu kanıtlayınız.

4. $0 \leq x \in \mathbb{R}$ ve $x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ olsun. Aşağıdakileri önermeleri kanıtlayınız.

(a) (x_n) dizisi artandır. ((β) da $r = \frac{n+1}{n}$ ve $y = \frac{x}{n+1}$ koyunuz.)

(b) $k \in N$ ve $x < k$ ise $x_n \leq e^k$ dır. ($x_n \leq x_{nk}$ olduğuna dikkat ederek (α) yı kullanınız.)

(c) (x_n) dizisi yakınsaktır.