MT 241 ANALİZ 3 Dersi 2016-2017 GÜZ YARIYILI FİNAL SINAVI ÇÖZÜMLER

1. $A = (0, 1] \subset \mathbb{R}$ aralığı olsun.

   (a) $1 \in A$ ama hiç bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $V_\varepsilon(1)$, A içinde olamaz, çünki $1 + \frac{\varepsilon}{2} \in V_\varepsilon(1)$ dir ama $1 + \frac{\varepsilon}{2} \notin A$ dir.

   (b) $A^c = \mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ olur. $0 \in A^c$ ama hiç bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $V_\varepsilon(0)$, A^c içinde olamaz, çünki $x = \begin{cases} \frac{1}{2} & \varepsilon \geq 1 \\ \frac{\varepsilon}{2} & \varepsilon < 1 \end{cases}$ için $x \in V_\varepsilon(1)$ dir ama $x \notin A$ dir.

2. $\mathbb{R}$ nin tamlık özelliğinden, $\mathbb{R}$ de $t = \sup S$ (S nin en küçük üst sınırı) vardır. (Yani i) $\forall x \in S$ için $x \leq t$ dir. ii) t', S nin bir üst sınırı ise $t \leq t'$ dır.)

   (a) $x \in a + S$ olsun, $a + S$ nin tanımından, $x = a + s$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. $s \leq t$ olduğundan, $x = a + s \leq a + t$ olur. Bu da $a + t$ nin $a + S$ için bir üst sınır olduğunu gösterir.

   (b) k, $a + S$ için bir üst sınır olsun. $a + S$ nin tanımından, $\forall s \in S$ için $a + s \leq k$ olması anlamına gelir. Buradan, $\forall s \in S$ için $s \leq k - a$ olduğu elde edilir. Bu da $k - a$ nın S için bir üst sınır olması demektir. t, S için en küçük alt sınır olduğu için, $t \leq k - a$, yani $a + t \leq k$ olur.

   Bunlar $a + t$ nin $a + S$ nin en küçük alt sınırı ($a + t = \sup(a + S)$) olduğu gösterir.

3. (b_n) (gerçel sayıların) bir dizi(si) olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = (b_{n+1} - b_n)$ olarak tanımlayalım.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= x_1 = b_2 - b_1 \\
s_2 &= x_1 + x_2 = (b_2 - b_1) + (b_2 - b_1) = b_3 - b_1 \\
&\vdots \\
s_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1
\end{aligned}
$$

   olur (bu eşitlik Tümevarım ile de gösterilebilir). (b_n) yakınsak kabul edildi. $\lim b_n = b$ olsun. Kuyruk (veya Alt Dizi) Teoreminden $\lim b_{n+1} = b$ olur. (Sabit dizinin limiti ve Limit Teoreminden) $\lim s_n = \lim(b_{n+1} - b_1) = b - b_1$ olur. (s_n) dizisi yakınsak ve limiti $b - b_1$ olduğu için de (serilerin yakınsaklık tanımından) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisi yakınsaktır ve toplamı da $b - b_1 = \lim b_n - b_1$ olur.

4. (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ serisi pozitif terimli bir seri ve terimleri azalan bir dizidir. Cauchy nin Yoğunlaştırma Testini kullanalım. $2^n x_{2^n} = \frac{2^n}{2^n \ln(2^n)} = \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{n}$ dir. $\sum \frac{1}{n}$ (Harmonik seri ıraksak (ve $\frac{1}{\ln 2} \neq 0$) olduğu için $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{n}$ ıraksak bir seridir.
   Yoğunlaştırma Teoreminden ($\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n} \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{n}$ olur, bu nedenle) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ serisi de

ıraksaktır.

İkinci Çözüm: İntegral testi ile

$f(x) = \frac{1}{x\ln x}$, $[2, +\infty)$ aralığında sürekli ve azalan (türevine bakın) bir fonksiyondur.

$$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{\ln 2}^{\ln t}\frac{1}{u}\,du = \lim_{t\to+\infty} \ln u|_{\ln 2}^{\ln t} = \lim_{t\to+\infty}(\ln(\ln t) - \ln(\ln 2)) = +\infty$$

yani $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$ özge integrali ıraksak olduğu için, integral testinden, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ serisi de ıraksaktır.

(b) Oran testini deneyelim:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2\cdot 4\cdots(2n)(2n+2)}{5\cdot 7\cdots(2n+3)(2n+5)}\frac{5\cdot 7\cdots(2n+3)}{2\cdot 4\cdots(2n)} = \frac{2n+2}{2n+5}$$

olur. $\lim \frac{2n+2}{2n+5} = 1$ olduğu için Oran Testi sonuç vermez. Raabe nin Testini deneyelim.

$$\lim n(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}) = \lim \frac{3n}{2n+5} = \frac{3}{2} > 1$$

olduğu için $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdots(2n+3)}$ serisi yakınsaktır.

5. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|y_n| \le M$ olacak şekilde bir M gerçel sayısı seçelim ((y_n) sınırlı kabul edildiği için böyle bir sayı vardır) Buradan, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x_n y_n| \le M|x_n|$ elde edilir. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ mutlak yakınsak olduğu için $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|$ serisi yakınsaktır. karşılaştırma testinden, $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n|$ (pozitif terimli) serisi yakınsaktır. Bu da $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n y_n)$ serisinin mutlak yakınsak olması demektir.

6. $x \in \mathbb{R}$ için ($e^{ix} = \cos x + i\sin x$ özdeşliğinden) $\cos x$, e^{ix} in gerçel kısmıdır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\cos 1 + \cos 2 + \cdots + \cos n = \operatorname{Re} e^i + \operatorname{Re} e^{2i} + \cdots + \operatorname{Re} e^{ni} = \operatorname{Re}(e^i + e^{2i} + \cdots + e^{ni}) = \operatorname{Re}\left(e^i \frac{e^{ni}-1}{e^i-1}\right)$ olur. Her karmaşık sayı için $|\operatorname{Re} z| \le |z|$ olduğundan, ($\forall n \in \mathbb{N}$ için)

$$|\cos 1 + \cos 2 + \cdots + \cos n| \le |e^i|\left|\frac{e^{ni}-1}{e^i-1}\right| = \frac{|e^{ni}-1|}{|e^i-1|} \le \frac{2}{|e^i-1|}$$

olur. Bu , $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n$ serisinin kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olması demektir.

$\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi azalan ve $\lim \frac{1}{n} = 0$ olduğu için, Dirichlet nin testinden $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ serisi yakınsaktır.