MT 132 Ara Sınav Çözümleri

1.a) $f(x) = e^x$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{(n)}(x) = e^x$ olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ olur. McLaurin serisi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ olur.

İlk 5 terim $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 = P_4(x)$ olur. Kalanlı Taylor Teoreminden $e^x = P_4(x) + R_4$ ve (0 ile x arasında bir z sayısı için) $R_4 = \frac{f^{(5)}(z)}{5!}x^5$ olur. $x = \frac{1}{3}$ için $e^{\frac{1}{3}} = P_4(\frac{1}{3}) + R_4$ olur. Soruda belirtildiği gibi ilk beş terim alınırsa $e^{\frac{1}{3}} \approx P_4(\frac{1}{3}) = \frac{2713}{1944}$ ve Hata=$|R_4| = \frac{e^z}{3^5 5!}$, e^x artan bir fonksiyon ve $0 < z < \frac{1}{3}$ olduğundan $e^z < e^{\frac{1}{3}} < e < 3$ ve dolayısıyla Hata$<\frac{1}{3^4 5!} = \frac{1}{81 \times 120} = \frac{1}{9720}$ elde edilir.

b) $(x^{1/3})^2 + (y^{1/3})^2 = 1$ olduğundan $x = (\cos t)^3$ ve $y = (\sin t)^3$ $0 \le t \le 2\pi$ alarak parametrize edebiliriz.

2.a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \frac{1 \bullet 4 \bullet 7 \cdots (3n+1)}{3^n\, n!} = \frac{1 \bullet 4 \bullet 7 \cdots (3n+1)}{3 \bullet 6 \bullet 9 \cdots 3n} = \frac{4}{3}\frac{7}{6} \cdots \frac{3n+1}{3n} > 1$ olduğundan $a_n \nrightarrow 0$ olur, n –inci Terim testinden $\sum a_n$ ıraksaktır.

b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $n^2 \ge n$ (ve üstel fonksiyon artan) olduğundan $e^{-n^2} \le e^{-n}$ olur. $\sum e^{-n} = \sum (\frac{1}{e})^n$ bir geometrik seri ve $|r| = \frac{1}{e} < 1$ olduğundan yakınsaktır.($\sum e^{-n^2}$ pozitif terimli bir seri olduğundan) Karşılaştırma testinden $\sum e^{-n^2}$ de yakınsak bir seridir.(Oran veya Kök Tesleri ile de yapılabilir)

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n+1}}(x+1)^n$ Kuvvet serisi $x = -1$ için yakınsaktır. $x \ne -1$ için $U_n = \frac{3^n}{\sqrt{n+1}}(x+1)^n$ olsun. Oran testini kullanalım. $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = 3\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\,|x+1|$ olur.

$\lim\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim 3\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\,|x+1| = 3|x+1|$ dir. Oran Testinden, bu seri $3|x+1| < 1$ için (mutlak) yakınsak ve $3|x+1| > 1$ için ıraksaktır. Buradan (yakınsaklık yarıçapı) $r = \frac{1}{3}$ bulunur. $3|x+1| = 1$ olması $x = -1 \pm \frac{1}{3} = \frac{-4}{3}, \frac{-2}{3}$ olması demektir. Bu noktalarda Oran testi sonuç vermez.

$x = \frac{-2}{3}$ için seri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, $p = \frac{1}{2}$ için p-serisi olur. $p \le 1$ olduğundan seri ıraksaktır.

$x = \frac{-4}{3}$ için seri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-\frac{1}{2}}$ işaret değişimli bir seri oluşur. $p_n = n^{-\frac{1}{2}}$ olsun. $\lim p_n = \lim n^{-\frac{1}{2}} = 0$ ve (p_n) azalan olduğundan İşaret Değişimli Seri Testinden seri $x = \frac{-4}{3}$ için yakınsaktır. Yakınsaklık Aralığı: $[\frac{-4}{3}, \frac{-2}{3})$

4.a) $\int \tan^3 2x \sec^4 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \tan^3 2x \sec^2 2x\ (2\sec^2 2x)\, dx =$

$\frac{1}{2}\int \tan^3 2x (1 + \tan^2 2x)\ (2\sec^2 2x)\, dx \overset{u=\tan 2x}{=} \frac{1}{2}\int u^3 (1+u^2)\ du$

$= \frac{u^4}{8} + \frac{u^6}{12} + C = \frac{1}{8}\tan^4 2x + \frac{1}{12}\tan^6 2x + C$ ($u = \sec 2x$ alınarak da yapılabilir)

b) Kısmi integrasyon ile:

$I = \int e^{2x}\cos 3x\, dx \overset{u=e^{2x}, v'=\cos 3x}{=} \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \int \frac{2}{3}e^{2x}\sin 3x dx,$

Kısmi integrasyon ile: $\int e^{2x}\sin 3x\, dx \overset{u=e^{2x}, v'=\sin 3x}{=} -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \int \frac{2}{3}e^{2x}\cos 3x\, dx$

$I = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x\, dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}I + C$

, $\frac{13}{9}I = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x + C$ ve $I = \frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x + C$

5.a) $(x^2 - 4x + 8)' = 2x - 4, x = A(2x-4) + B$,

$A = \frac{1}{2}, B = 2, \int \frac{x}{x^2-4x+8}dx = \int \frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + \int 2\frac{1}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+8| + \int \frac{2}{x^2-4x+8}dx$

$x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4 = 4((\frac{x-2}{2})^2 + 1)$ $u = \frac{x-2}{2}$ olsun. $u' = \frac{1}{2}$ olur.

$\int \frac{2}{x^2-4x+8} dx = 4\int \frac{\frac{1}{2}}{4((\frac{x-2}{2})^2+1)} dx = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + C = \arctan \frac{x-2}{2} + C$. Böylece
$\int \frac{x}{x^2-4x+8} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 4x + 8| + \arctan \frac{x-2}{2} + C$ bulunur.

b) $\int \frac{\sqrt{x^2-7}}{x^2} dx, x = \sqrt{7} \sec\theta$ olsun.($x \geq \sqrt{7}$ iken) $\sqrt{x^2 - 7} = \sqrt{7} \tan\theta$ olur
$dx = \sqrt{7} \sec\theta \tan\theta \, d\theta$ olur.

$\int \frac{\sqrt{x^2-7}}{x^2} dx = \int \frac{\sqrt{7} \tan\theta}{7\sec^2\theta} \sqrt{7} \sec\theta \tan\theta \, d\theta = \int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta} d\theta = \int \frac{\sec^2\theta-1}{\sec\theta} d\theta = \int \sec\theta \, d\theta - \int \cos\theta \, d\theta$
$= \ln|\sec\theta + \tan\theta| - \sin\theta + C = \ln\left| \frac{x}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{x^2-7}}{\sqrt{7}} \right| - \frac{\sqrt{x^2-7}}{x} + C$ bulunur.