MT 132 ARA SINAV ÇÖZÜMLER

B

1. a) $P_2(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$ $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, a = 27$

$P_2(x) = 3 + \frac{1}{27}(x-27) - \frac{1}{2187}(x-27)^2$. $\sqrt[3]{28} = f(28) \approx P_2(28) = 3 + \frac{1}{27} - \frac{1}{2187} = \frac{6641}{2187}$

b) $f(28) = P_2(28) + R_2$. $R_2 = \frac{f'''(c)}{3!}(28-27)^3 = \frac{5}{81\sqrt[3]{c^8}}, 27 < c < 28$. $3^8 = 27^{\frac{8}{3}} < c^{\frac{8}{3}} < 28^{\frac{8}{3}}$.

Hata=$|R_2| = \frac{5}{81\sqrt[3]{c^8}} < \frac{5}{3^{12}}$

2.a) $b_n = \frac{1}{n^2}$ olsun. $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{n^2}{n^2-\ln(n+1)}, \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-\ln(x+1)} \overset{L'Hospital}{=}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x-\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2-\frac{1}{x^2+x}} = 1$ olduğundan $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$, Limit Karşılaştırma Testinden $\sum a_n$ ile $\sum b_n$ aynı karakterdedir. $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ p serisi $p > 1$ olduğundan yakınsaktır O halde $\sum a_n = \sum \frac{1}{n^2-\ln(n+1)}$ de yakınsaktır.

b) $\lim \frac{3^n-n}{3^n+n^2}$ i bulalım,

$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x-x}{3^x+x^2} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x\ln 3-1}{3^x\ln 3+2x} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x(\ln 3)^2}{3^x(\ln 3)^2+2} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x(\ln 3)^3}{3^x(\ln 3)^3} = 1$ olduğundan, $\lim \frac{3^n-n}{3^n+n^2} = 1 \neq 0$ olur.n-inci Terim Testinden $\sum \frac{3^n-n}{3^n+n^2}$ ıraksaktır.

3. Kuvvet serisi 1 merkezli olduğundan $x = 1$ için (mutlak) yakınsaktır. $x \neq 1$ için Mutlak Oran Testi kullanalım.($u_n = \frac{1\bullet 4\bullet 7\cdots(3n+1)}{n!}(x-1)^n$ için)

$\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim \frac{1\bullet 4\bullet 7\cdots(3n+1)(3n+4)}{(n+1)!}|x-1|^{n+1} \frac{n!}{1\bullet 4\bullet 7\cdots(3n+1)|x-1|^n} = \lim \frac{3n+4}{n+1}|x-1| = 3|x-1|$.Oran testinden kuvvet serisi $3|x-1| < 1$ için mutlak yakınsak, $3|x-1| > 1$ için ıraksaktır. $3|x-1| = 1$ ise $x = 1 \pm \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ olur.

$x = \frac{4}{3}$ ise seri $\sum \frac{1\bullet 4\bullet 7\cdots(3n+1)}{n!}(\frac{1}{3})^n = \sum \frac{1\bullet 4\bullet 7\cdots(3n+1)}{3^n n!} = \sum \frac{1\bullet 4\bullet 7\cdots(3n+1)}{3\bullet 6\bullet\cdots 3n}$ şekline gelir. $\frac{1\bullet 4\bullet 7\cdots(3n+1)}{3\bullet 6\bullet\cdots 3n} = \frac{4}{3}\frac{7}{6}\cdots\frac{3n+1}{3n} > 1$ olduğundan $\lim a_n \neq 0$ olur ve n-inci Terim Testinden seri bu uç noktasında ıraksaktır.

$x = -\frac{3}{2}$ ise seri $\sum \frac{1\bullet 4\bullet 7\cdots(3n+1)}{n!}(\frac{-1}{3})^n = \sum(-1)^n \frac{1\bullet 4\bullet 7\cdots(3n+1)}{3^n n!} = \sum(-1)^n \frac{1\bullet 4\bullet 7\cdots(3n+1)}{3\bullet 6\bullet\cdots 3n}$ şekline gelir. $|a_n| = \frac{1\bullet 4\bullet 7\cdots(3n+1)}{3\bullet 6\bullet\cdots 3n} = \frac{4}{3}\frac{7}{6}\cdots\frac{3n+1}{3n} > 1$ olduğundan $\lim|a_n| \neq 0$ olur ve n-inci Terim Testinden seri bu uç noktasında da ıraksaktır.

Yakınsaklık Aralığı:$(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ bulunur.

4. a) α,teğet ile yarıçap arasındaki açı olsun. $\tan\alpha = \frac{r}{r'} = \frac{\cos 2\theta}{-2\sin 2\theta}$ oluşundan $\theta = \frac{\pi}{6}$ için $\tan\alpha = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$ olur. $\alpha = \phi - \theta$ olduğundan $\phi = \alpha + \theta$ olur Teğetin eğimi $m = \frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{6}\tan\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{7}$ bulunur.

b) $u = 2^x$ olsun. $du = 2^x\ln 2\, dx$ olur. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\ln 2}Arc\sin u + C = \frac{1}{\ln 2}Arc\sin 2^x + C$

5. a) $x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$ olduğundan $u = x - 2 = \sec\theta$ olsun. $\sqrt{x^2-4x+3} = \tan\theta, x - 1 = \sec\theta + 1$ ve $dx = \sec\theta\tan\theta$ olur.

$\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx = \int \frac{\sec\theta+1}{\tan\theta}\sec\theta\tan\theta d\theta = \int\sec^2\theta d\theta - \int\sec\theta d\theta = \tan\theta - \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$

$= \sqrt{x^2-4x+3} - \ln\left|\sqrt{x^2-4x+3} + x - 2\right| + C$

b) Kısmi İntegrasyon ile: $u = \ln x, v' = \frac{1}{x^3}$ olsun. $u = \frac{1}{x}, v = \frac{-1}{2x^2}$ olur. $\int udv = uv - \int vdu$ olduğundan $\int \ln x\frac{1}{x^3}dx = \frac{-\ln x}{2x^2} - \int \frac{1}{x}(\frac{-1}{2x^2})dx = \frac{-\ln x}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^3}dx = \frac{-\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$ bulunur.