MT 132 Analiz II

FİNAL ÇÖZÜMLER

1. (a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n+1)}{3\cdot6\cdot9\cdots(3n+3)} \geq \frac{3\cdot6\cdot9\cdots(3n)}{3\cdot6\cdot9\cdots(3n+3)} = \frac{1}{3}\frac{1}{n+1}$ dir. $\sum \frac{1}{n+1}$ Harmonik seri ıraksaktır. Karşılaştırma testinden $\sum \frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n+1)}{3\cdot6\cdot9\cdots(3n+3)}$ de ıraksak olur.

(b) $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ olsun. K.S.T-T. Türevlenebilmesi teoreminden ($|x| < 1$ için) $\frac{dg}{dx} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx}(\ln(1+x))$ olur. O.D.T. nin bir sonucu olarak $g'(x) = \ln(1+x) + C$ o.ş. bir $C \in \mathbb{R}$ vardır. $x = 0$ konursa $C = 0$ bulunur. Yani ($|x| < 1$ için) $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ olur. x yerine $(x+1)^2$ konursa ($|x+1| < 1$ için)$f(x) = \ln(1+(x+1)^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^{2(n+1)}}{n+1}$ elde edilir. (a_{103}, $(x+1)^{103}$ teriminin katsayısı olmak üzere) $f^{(103)}(-1) = 103!\,a_{103}$. Bu kuvvet serisinde $(x+1)^{103}$ terimi yoktur, yani $a_{103} = 0$ dır. Öyleyse $f^{(103)}(-1) = 0$ bulunur.

2. (a) Bölge $B\ :\ 1 \leq x \leq \sqrt{3},\ -\sqrt{x^2-1} \leq y \leq \sqrt{x^2-1}$ olarak yazılabildiğinden $\bar{x} = \frac{\int_1^{\sqrt{3}} 2x\sqrt{x^2-1}\ dx}{\int_1^{\sqrt{3}} 2\sqrt{x^2-1}\ dx} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{6}-\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$ olur. Bölge x eksenine göre simetrik olduğundan $\bar{y} = 0$ olur.

(b) $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)^2}$ olsun. $[1, +\infty)$ aralığında f nin azalan ve sürekli olduğu aşikardır. İntegral Testinden $\sum \frac{1}{n(1+\ln n)^2}$ serisi ile $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ (I. tip özge integrali) aynı karakterdedir. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)^2} \overset{(u=1+\ln x)}{=} \frac{-1}{1+\ln x}+C$. $\lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{dx}{x(1+\ln x)^2} = \lim_{R\to+\infty} 1 - \frac{1}{1+\ln R} = 1$ olduğundan $\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ özge integrali yakınsaktır. İntegral testinden $\sum \frac{1}{n(1+\ln n)^2}$ yakınsaktır.

3. (a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ özge integrali I. tip veya II. tip değildir. $c = 4$ alıp $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ (II. tip) ve $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ (I. tip) özge integralleri oluşturalım. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} \overset{(x=2\sec\theta)}{=} \int \frac{2\sec\theta\tan\theta\ d\theta}{2\tan\theta} = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C = \ln|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}| + C$ sonucunda $\lim_{R\to+\infty}\int_4^R \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{R\to+\infty}\ln|\frac{R}{2} + \frac{\sqrt{R^2-4}}{2}| - \ln(2+\sqrt{3}) = +\infty$ olduğundan $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ (I. tip) özge integrali ıraksaktır, dolayısıyla $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ özge integrali ıraksaktır.

(b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 4y = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4x = 0$ Kritik noktalar: (0,0),$(\frac{8}{3}, \frac{-16}{3})$, ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 4$, $\Delta(0,0) = -16 < 0$, (0,0) da eyer noktası var. $\Delta(\frac{8}{3}, \frac{-16}{3}) > 0$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{8}{3}, \frac{-16}{3}) > 0$ olduğundan $(\frac{8}{3}, \frac{-16}{3})$ da yerel minimum vardır.

4. (a) $x = t^2,\ y = t^3,\ t \in [-1, \sqrt[3]{3}\,]$ şeklinde parametrize edilebilir. $L = \int_{-1}^{\sqrt[3]{3}} \sqrt{4t^2+9t^4}\ dt = \int_{-1}^{\sqrt[3]{3}} |t|\sqrt{4+9t^2}\ dt = -\int_{-1}^{0} t\sqrt{4+9t^2}\ dt + \int_0^{\sqrt[3]{3}} t\sqrt{4+9t^2}\ dt = -\frac{16}{27} + \frac{13\sqrt{13}}{27} + \frac{1}{27}(4+\sqrt[3]{9^4})^{3/2}$

(b) Kesişme Noktaları: $1+\cos\theta = \frac{3}{4}\sec\theta$, $\cos^2\theta + \cos\theta - \frac{3}{4} = 0$, ($t = \cos\theta$) $t^2 + t - \frac{3}{4} = 0$, $t = \frac{1}{2}$ ($\cos\theta \neq -\frac{3}{2}$), $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ olur. Bu aralıkta $1+\cos\theta \geq \frac{3}{4}\sec\theta \geq 0$ olduğundan, Alan$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos\theta)^2 - (\frac{3}{4}\sec\theta)^2\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos\theta)^2 - (\frac{3}{4}\sec\theta)^2\ d\theta = \frac{9\sqrt{3}+8\pi}{16}$

5. (a) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{8x^2-2y^2}{(4x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{4x^2-y^2}{(4x^2+y^2)^2}$. $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan $M\,dx + N\,dy$ kapalı form değildir, dolayısıyla Tam diferansiyel değildir.

(b) $P = 2N = \frac{-2x}{4x^2+y^2}$ olsun $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$ olduğundan ((0,0) ı içermeyen) her bölgede $M\,dx + N\,dy$, kapalı bir formdur. B, (0,0) ı içermeyen herhangi bir konveks küme (örneğin $y > 0$ bölgesi) olsun, Konveks Bölgelerde Kapalı Formların Tamlığı Teoreminden, $M\,dx + P\,dy$ B bölgesinde Tam Diferansiyel olacaktır.

(c) $f(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int \frac{2y}{4x^2+y^2}\,dx = \text{Arctan}\,\frac{2x}{y} + \phi(y)$ olur. $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x}{(4x^2+y^2)^2} + \phi'(y) = P(x,y)$ oluşundan $\phi'(y) = 0$ ve $\phi(y) = C$(sabit) olur. Dolayısıyla $f(x,y) = \text{Arctan}\,\frac{2x}{y} + C$ olmalıdır.