Çözümler

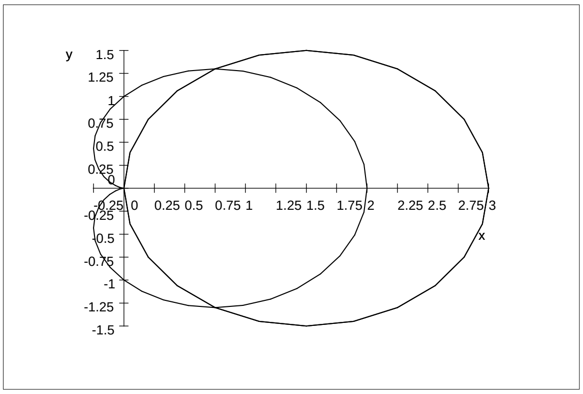
1.$f(x) = \sqrt[3]{x}, a = 8$ alalım. $P_3(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2 + \frac{5}{20736}(x-8)^3$,
$f(x) = P_3(x) + R_3$
Buradan $\sqrt[3]{7} \approx P_3(7) = 2 - \frac{1}{12} - \frac{1}{288} - \frac{5}{20736} = \frac{39667}{20736}$ bulunur.
$R_3 = \frac{f''''(c)}{4!}(7-8)^4 = \frac{10}{3^5 c^{\frac{11}{3}}}$(bir $7 < c < 8$ için) Hata= $|R_3|$= $\frac{10}{3^5 c^{\frac{11}{3}}}$,$7^{\frac{11}{3}} < c^{\frac{11}{3}} < 8^{\frac{11}{3}}$ olduğundan
Hata= $|R_3|$< $\frac{10}{3^5 7^{\frac{11}{3}}}$ olur.

2.Kuvvet serisi $a = 2$ merkezli olduğundan $x = 2$ için yakınsar.
$x \neq 2$ için $U_n = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)4^n}(x-2)^n$ olsun. Oran Testi kullanalım.
$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}\frac{n+1}{n+2}\frac{|x-2|}{4}$ olur. $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} = 1$ (L'Hospital Kuralı ile),$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 1$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \frac{|x-2|}{4}$ olur. Oran Testinden $\frac{|x-2|}{4} < 1$ için kuvvet serisi mutlak yakınsak, $\frac{|x-2|}{4} > 1$ için kuvvet serisi ıraksaktır. Öyleyse yakınsaklık yarıçapı $r = 4$ olur. Uç noktalar $x = 2 \pm 4 = -2, 6$ olur.
$x = 6$ için kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ = şekline gelir. $n > 2$ için $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} > 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (Harmonik seri oluşundan) ıraksak olduğu için Karşılaştırma Testinden $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ ıraksaktır.
$x = -2$ için kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$ = şekline gelir,bu bir işaret değişimli seridir.$p_n = \frac{\ln n}{n}$
i)$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ olsun $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0(x > e$ için) olduğundan $(p_n)(n > 2$ için) azalandır.
ii)$\lim p_n = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\infty/\infty\ L'Hospital}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ olur.
İşaret Değişimli Seri Teoreminden $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ yakınsaktır.
Yakınsaklık Aralığı:$[-2, 6)$ olur.

3.$\frac{x}{(x+1)(x^2+4)}$ i basit kesirlere ayıralım.
$\frac{x}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}, A = \frac{-1}{5}, B = \frac{1}{5}, C = \frac{4}{5}$ bulunur.
$\int\frac{x}{(x+1)(x^2+4)}dx = \frac{-1}{5}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{5}\int\frac{x}{x^2+4}dx + \frac{4}{5}\int\frac{dx}{x^2+4}$
$= \frac{-1}{5}\ln|x+1| + \frac{1}{10}\ln(x^2+4) + \frac{2}{5}Arc\tan(\frac{x}{2}) + C$

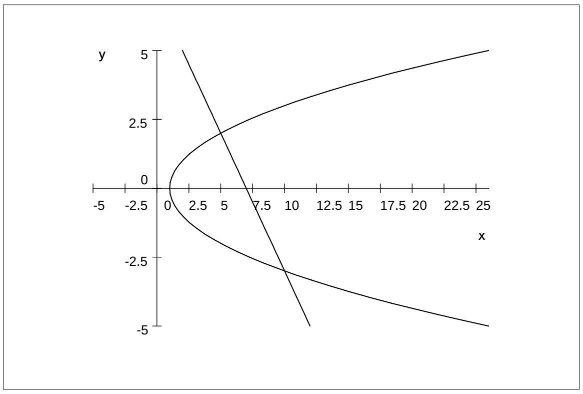
4.$\int\frac{d\theta}{3\sin\theta+4\cos\theta}$ integralinde $z = \tan\frac{\theta}{2}$ alalım. $\cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \sin\theta = \frac{2z}{1+z^2}, d\theta = \frac{2dz}{1+z^2} olur.$
$\int\frac{d\theta}{3\sin\theta+4\cos\theta} = \int\frac{1}{3z+2-2z^2}dz,\ 3z+2-2z^2 = (2-z)(2z+1)$,Basit kesirlerle
$\frac{1}{3z+2-2z^2} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{2z+1}$ olur. $A = \frac{1}{5}, B = \frac{2}{5}$ olur. Buradan
$\int\frac{1}{3z+2-2z^2}dz = \frac{1}{5}\int\frac{1}{2-z}dz + \frac{2}{5}\int\frac{1}{2z+1}dz = -\frac{1}{5}\ln|2-z| + \frac{1}{5}\ln|2z+1| + C$
$= -\frac{1}{5}\ln|2-\tan\frac{\theta}{2}| + \frac{1}{5}\ln|2\tan\frac{\theta}{2}+1| + C$

5.Kesişme Noktaları:$3\cos\theta = 1+\cos\theta, 2\cos\theta = 1, \cos\theta = \frac{1}{2}$, $([0, 2\pi]$ aralığındaki çözümler) $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$(Ayrıca $r = 0$ da bir kesişim noktasıdır ama bizi ilgilendirmiyor ; aşağıdaki şekle bakın)



$Alan = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}((3\cos\theta)^2 - (1+\cos\theta)^2)d\theta = \pi$

6.Kesişme Noktaları:(5,2),(10,-3)



a)(Disk Yöntemiyle)$\int_1^5 \pi(\sqrt{x-1})^2dx + \int_5^7 \pi(7-x)^2dx = \frac{32}{3}\pi$

b) (Silindirik Tabakalar Yöntemiyle)$\int_1^5 2\pi x(\sqrt{x-1})dx + \int_5^7 2\pi x(7-x)dx = \frac{884}{15}\pi$

veya (Disk Yöntemiyle) $\int_0^2 \pi((7-y)^2 - (y^2+1)^2)dy = \frac{884}{15}\pi$

7a)$L = \int_e^{e^2}\sqrt{1+(x-\frac{1}{4x})^2}\,dx = \int_e^{e^2}\sqrt{(x+\frac{1}{4x})^2}\,dx = \int_e^{e^2} x+\frac{1}{4x}\ dx = \frac{x^2}{2}+\frac{\ln x}{4}|_e^{e^2}$
$= \frac{e^4-e^2}{2} + \frac{1}{4}$

b)$u = f(t), t = x^2+y^2-2z^2$ Zincir Kuralından $u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = f'(t)2x, u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = f'(t)2y,$

$u_z = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{dt}\frac{\partial t}{\partial z} = f'(t)(-4z)$ olur.

$xzu_y + yzu_x + xyu_z = 2xyzf'(t) + 2xyzf'(t) - 4xyzf'(t) = 0$ olur.

8. Kritik Noktalar:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+2xy = 0, \frac{\partial f}{\partial x} = 2y+x^2 = 0$

$0 = 2x+2xy = 2x(1+y) \rightarrow x = 0$ veya $y = -1. x = 0$ ise $y = 0; y = -1$ ise $x = \pm\sqrt{2}$

Kritik Noktalar:$(0,0), (\sqrt{2},-1), (-\sqrt{2},-1)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2+2y, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 2x$

(0,0) da: $g(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ yerel minimum.

$(\sqrt{2},-1)$ da: $g(\sqrt{2},-1) = \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0$ eyer noktası

$(-\sqrt{2},-1)$ da: $g(-\sqrt{2},-1) = \begin{vmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0$ eyer noktası

9 a)$M = 3x^2y + 2xy, N = x^3 + xy$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2x, \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + y$ ve $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan (2.derece Karışık Kısmi Türevlerin Eşitliği Teoreminden) tam diferansiyel değildir.

b)$\frac{\partial f}{\partial x} = xy + ye^{xy} + \sin x$ ve $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}x^2 + xe^{xy} + 1$ olmalıdır.

$f(x,y) = \int(xy + ye^{xy} + \sin x)\ dx = \frac{1}{2}x^2y + e^{xy} - \cos x + \phi(y)$ olmalıdır. Buradan

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}x^2 + xe^{xy} + \phi'(y) = \frac{1}{2}x^2 + xe^{xy} + 1$ oluşundan $\phi'(y) = 1$ ve $\phi(y) = y + C$ olur.

Dolayısıyla $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y + e^{xy} - \cos x + y + C$ olmalıdır.