

1. $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$ dizisi veriliyor.

(a) i. $x_1 = 1 < 3$

ii. Bir $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n < 3$ olduğunu kabul edelim. $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} < \sqrt{3 + 6} = 3$ olur.

Tümevarım ilkesinden, her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n < 3$ olur.

(b) $x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n + 6} - x_n = \frac{x_n + 6 - x_n^2}{\sqrt{x_n + 6} + x_n} = \frac{(x_n + 2)(3 - x_n)}{\sqrt{x_n + 6} + x_n}$

Dizinin tanımından ve (a) dan dolayı $x_n + 2 > 0$, $3 - x_n > 0$, $\sqrt{x_n + 6} + x_n > 0$ olduğundan, (her $n \in \mathbb{N}^+$ için) $x_{n+1} - x_n > 0$ olur. Bu da dizinin (kesin) artan olması demektir.

(c) Dizi artan ve üstten (3 sayısı ile) sınırlı olduğundan, Monoton Yakınsaklık Teoreminden, yakınsaktır. $\lim x_n = L$ ($L \in \mathbb{R}$) olsun. Alt Dizi (veya Kuyruk) Teoreminden $\lim x_{n+1} = L$ olur. ($x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$ olduğundan) Dizilerin limitleri ile ilgili teoremlerden, $L = \sqrt{L + 6}$ olmalıdır. Bu denklemin tek çözümü $L = 3$ dir.

2. $\sum \frac{3^n n!}{(2n)!} x^n$ kuvvet serisi, $x = 0$ (merkez) için kuvvet serisi (mutlak) yakınsaktır. $x \neq 0$ için $U_n = \frac{3^n n!}{(2n)!} x^n$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \neq 0$ olur. Oran Testi kullanabiliriz:

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \left| \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(2(n+1))!} x^{n+1}}{\frac{3^n n!}{(2n)!} x^n} \right| = \frac{3^{n+1} (n+1)!}{3^n n!} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \frac{3(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} |x| = \frac{3}{2(2n+1)} |x|$$

dir. Her $x \neq 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = 0 < 1$ olduğundan kuvvet serimiz (Oran Testinden) her $x \neq 0$ için (mutlak) yakınsaktır. 0 için de (mutlak) yakınsak olduğundan kuvvet serimiz, her $x \in \mathbb{R}$ için (mutlak) yakınsaktır. Dolayısıyla, yakınsaklık yarıçapı $R = \infty$ dir.

3. Teorem(ler) kullanarak, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{3}}$ olur. Binom Teoreminden, ($m = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$ olduğu için) her $|t| < 1$ için, $(1+t)^{-\frac{1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{n} t^n$ olur. $t = -x^2$ olsun. Her $|x| < 1$ için,

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{n} (-1)^n x^{2n}$ olur. K.S.T-T.T teoreminden, (a_{50} , kuvvet serisinde x^{50} nin katsayısı olmak üzere) $a_{50} = \frac{f^{(50)}(0)}{50!}$ dir. Bu da, $n = 25$ alındığında olur.

$$f^{(50)}(0) = 50! \binom{-\frac{1}{3}}{25} (-1)^{25} = -50! \binom{-\frac{1}{3}}{25} = -\frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}-1)\cdots(-\frac{1}{3}-24)}{25!} 50!$$

4. (a) $9x^6 + y^{10} = 4$ Eğri denklemi $(3x^3)^2 + (y^5)^2 = 2^2$ olduğu için, (Saatin tersi yönü için) $3x^3 = 2 \cos t$, $y^5 = 2 \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ şeklinde parametrize edilebilir. Bunlar düzenlenerek

$$x = \sqrt[3]{\frac{2 \cos t}{3}}, \quad y = \sqrt[5]{2 \sin t}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{bulunur}$$

(b) $r = \cos(2\theta)$ için $\tan \alpha = \frac{\cos(2\theta)}{-2 \sin(2\theta)} = \frac{-1}{2 \tan(2\theta)}$ olur. Yatay teğet için $m = \tan(\theta + \alpha) = \frac{\tan \theta + \tan \alpha}{1 - \tan \theta \tan \alpha} = 0$ olmalıdır. $\tan \theta + \tan \alpha = \tan \theta + \frac{-1}{2 \tan(2\theta)} = 0$ denkleminde ($\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ olduğu için) $\tan^2 \theta = \frac{1}{5}$ bulunur. $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ olduğundan $\theta = \text{Arctan} \frac{1}{\sqrt{5}}$ olmalıdır.

5. (a) $1 dx = dv$, $u = \text{Arctan } x$ alalım. $du = \frac{dx}{x^2+1}$ olur, $v = x$ alabiliriz.

$$\int \text{Arctan } x dx = \int \text{Arctan } x \cdot 1 dx = x \text{Arctan } x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \text{Arctan } x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

(b) $z = \tan \frac{\theta}{2}$ olsun. $\cos \theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}$ olur.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} d\theta &= \int \frac{\frac{1-z^2}{1+z^2}}{1 + \frac{1-z^2}{1+z^2}} \frac{2 dz}{1+z^2} = \int \frac{1-z^2}{1+z^2} dz = \int \left(-1 + \frac{2}{1+z^2} \right) dz \\ &= -z + 2 \text{Arctan } z + C = -\tan \frac{\theta}{2} + \theta + C \end{aligned}$$

6. $4x - x^2 = 4 - (x^2 - 4x + 4) = 2^2 - (x - 2)^2$ olduğu için $x - 2 = 2 \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) olsun. $\sqrt{4x - x^2} = 2 \cos \theta$, $dx = 2 \cos \theta d\theta$ olur.

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{\sqrt{4x-x^2}} dx &= \int \frac{2 \sin \theta + 3}{2 \cos \theta} 2 \cos \theta d\theta = \int 2 \sin \theta d\theta + \int 3 d\theta = -2 \cos \theta + 3\theta + C \\ &= -\sqrt{4x-x^2} + 3 \text{Arcsin } \frac{x-2}{2} + C \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

7. $\frac{x+1}{x^4+x^2}$ rasyonel fonksiyonu

$$\frac{x+1}{x^4+x^2} = \frac{x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \quad \text{şeklinde basit kesirlere ayırılır}$$

$x+1 = Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + x^2(Cx+D)$ olmalıdır. $x=0$ alalım, $B=1$ bulunur. $x=i$ alındığında $i+1 = -(Ci+D)$ eşitliğinden $C=D=-1$ bulunur. Daha sonra da $A=1$ bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^4+x^2} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{-x-1}{x^2+1} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \text{Arctan } x + C \end{aligned}$$