MT 132 Analiz II Final Sınavı (2019) ÇÖZÜMLER

1. $f(x) = \sqrt{1+x^3}$ olsun. (MT 131 deki Teoremlerden) f, $[-1,+\infty)$ aralığında süreklidir. $G(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^3}\,dt$ olsun. DİHTT 2. şeklinden, G, $[-1,+\infty)$ aralığında türevlenebilirdir ve $G'(x) = f(x) = \sqrt{1+x^3}$ dir. DİHTT 1. şeklinden ($\sin x, x^2 \in [-1,+\infty)$ olduğunda, yani her $x \in \mathbb{R}$ için) $F(x) = G(x^2) - G(\sin x)$ dir. Zincir Kuralından,
$F'(x) = 2x\,G'(x^2) - \cos x\,G'(\sin x) = 2x\sqrt{1+x^6} - \cos x\sqrt{1+\sin^3 x}$ olur.
$F''(x) = 2\sqrt{1+x^6} + \dfrac{6x^6}{\sqrt{1+x^6}} + \sin x\sqrt{1+\sin^3 x} - \dfrac{3\sin^2 x\cos^2 x}{2\sqrt{1+\sin^3 x}}$,
$F''(1) = 5\sqrt{2} + \sin 1\sqrt{1+\sin^3 1} - \frac{3\sin^2 1\cos^2 1}{2\sqrt{1+\sin^3 1}}$ olur.

2. $\frac{x}{x^2-1}$ fonksiyonu, ($[0,+\infty)$ aralığında) sadece 1 noktası yakınında sınırsız, başka noktalarda süreklidir. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2-1}\,dx$, $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^2-1}\,dx$, $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x}{x^2-1}\,dx$ integrallerinin ilk ikisi II. tip, sonuncusu ise I. tip özge integraldir. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$ dir.
$\displaystyle\lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{x}{x^2-1}\,dx = \lim_{t\to 1^-}\frac{1}{2}\ln|t^2-1| = -\infty$ olur. II. tip özge integraller için yakınsaklık tanımından, $\int_0^1 \frac{x}{x^2-1}\,dx$ özge integrali ıraksaktır. Bu nedenle, $\int_0^\infty \frac{x}{x^2-1}\,dx$ özge integrali de ıraksaktır.

3. $-\frac{\pi}{8} \le \theta \le \frac{\pi}{8}$ aralığında, $r = \cos(4\theta)$, 8 yapraklı gülünün bir yaprağı oluşur.
Bu aralıkta, $f(\theta) = \cos(4\theta) \ge 0$ (ve sürekli) olduğu için, bir yaprağın alanı$= \frac{1}{2}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \cos^2(4\theta)\,d\theta$ olur.

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \cos^2(4\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2(4\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} (1+\cos(8\theta))\,d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{8}\sin(8x)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi}{16}$$

4. $y^5 = x^3$ eğrisini, $y = x^{\frac{3}{5}}$ şeklinde yazabiliriz. $y' = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$ olur.

(a) (x-ekseni etrafında dönüş için)

$$S = 2\pi\int_1^{\sqrt[3]{32}} x^{\frac{3}{5}}\sqrt{1+\left(\tfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_1^{\sqrt[3]{32}} \sqrt{x^{\frac{6}{5}} + \tfrac{9}{25}x^{\frac{2}{5}}}\,dx$$

(b) (y-ekseni etrafında dönüş için)

$$S = 2\pi\int_1^{\sqrt[3]{32}} x\sqrt{1+\left(\tfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_1^{\sqrt[3]{32}} \sqrt{x^2 + \tfrac{9}{25}x^{\frac{6}{5}}}\,dx$$

5. Bölge; $0 \le x \le 2, \quad 2-x \le y \le \sqrt{4-x^2}$ şeklinde (I. tip olarak) yazılabilir.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^2 x\left(\sqrt{4-x^2} - (2-x)\right)\,dx}{\int_0^2(\sqrt{4-x^2} - (2-x))\,dx} \qquad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^2((\sqrt{4-x^2})^2 - (2-x)^2)\,dx}{\int_0^2(\sqrt{4-x^2} - (2-x))\,dx}$$

Basit bir geometri ile (integralin alan oluşundan), $\int_0^2(\sqrt{4-x^2} - (2-x))\,dx = \pi - 2$ bulunur.

$$\frac{1}{2}\int_0^2((\sqrt{4-x^2})^2 - (2-x)^2)\,dx = \int_0^2(2x-x^2)\,dx = \frac{4}{3}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{4}{3}}{\pi-2} = \frac{4}{3(\pi-2)}$$

Bölge, $y = x$ doğrusuna göre simetrik oluşundan (denklemlere bakınız), ağırlık merkezi bu doğru üzerindedir. $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4}{3(\pi-2)}$ olur.

6. $f(x,y) = x^2y + 3x^2 + y^2 + 2y$ için $f_x = 2xy + 6x,\ f_y = x^2 + 2y + 2$ dir.
Kritik Noktalar: $2xy + 6x = 2x(y+3) = 0,\ x^2 + 2y + 2 = 0$ sistemini çözümleridir.
Bunlar da: $(0,-1), (2,-3), (-2,-3)$ noktalarıdır.
$f_{xx} = 2y + 6,\ f_{xy} = 2x,\ f_{yy} = 2$ olup tümü (her yerde) süreklidir.

$$\Delta(0,-1) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \text{ ve } f_{xx}(0,-1) = 4 > 0 \text{ olduğundan } (0,-1) \text{ de bir yerel minimum vardır.}$$

$$\Delta(2,-3) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -16 < 0 \text{ olduğundan } (2,-3) \text{ de bir eyer noktası vardır.}$$

$$\Delta(-2,-3) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -16 < 0 \text{ olduğundan } (-2,-3) \text{ de bir eyer noktası vardır.}$$

7. $f_x = 2xy\cos(x^2y) + \frac{y}{x^2} + \sec x$ ve $f_y = x^2\cos(x^2y) - \frac{1}{x} + \frac{y}{1+y^4}$ olacak şekilde bir $f(x,y)$ fonksiyonu bulmalıyız.
$f(x,y) = \int f_y\, dy = \int \left(x^2\cos(x^2y) - \frac{1}{x} + \frac{y}{1+y^4} \right) dy = \sin(x^2y) - \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(y^2) + \phi(x)$ olmalıdır.
$f_x = 2xy\cos(x^2y) + \frac{y}{x^2} + \sec x = 2xy\cos(x^2y) + \frac{y}{x^2} + \phi'(x)$ oluşundan $\phi'(x) = \sec x$ olmalıdır.
$\phi(x) = \int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$ bulunur. Öyleyse:

$$f(x,y) = \sin(x^2y) - \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(y^2) + \ln|\sec x + \tan x| + C \quad \text{olmalıdır.}$$