MT 132 ANALİZ II FİNAL SINAVI (2012) ÇÖZÜMLER

1. $y = x - \sin x,\ 0 \le x \le \pi$ olsun. Bu eğrinin:

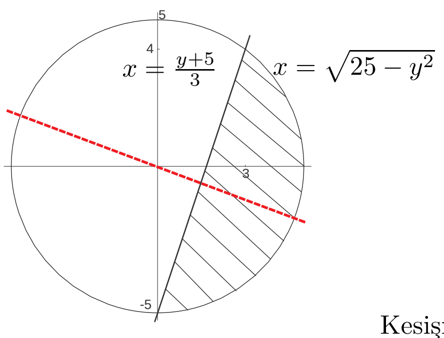
   (a) (x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan) dönel yüzeyin alanı$=\displaystyle\int_0^{\pi} 2\pi(x - \sin x)\sqrt{1 + (1 - \cos x)^2}\, dx$

   (b) (Eğrinin altında kalan bölgenin) y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi:
   $$\int_0^{\pi} 2\pi x(x - \sin x)\, dx = 2\pi \left(\frac{x^3}{3} + x\cos x - \sin x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi^4}{3} - 2\pi^2$$

2. $\theta \in [-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}]$ aralığındaki yaprak için yapılırsa:

   (a) $$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} (\cos 5\theta)^2\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{10}} (\cos 5\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{10}} (1 + \cos 10\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{10}\sin 10\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{10}} = \frac{\pi}{20}$$

   (b) $$L = \int_{-\frac{\pi}{10}}^{\frac{\pi}{10}} \sqrt{(\cos 5\theta)^2 + (-5\sin 5\theta)^2}\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{10}} \sqrt{\cos^2 5\theta + 25\sin^2 5\theta}\, d\theta$$



3. Kesişme Noktaları: $(0, -5)$, $(3, 4)$ bulunur.
$$B:\ -5 \le y \le 4, \quad \frac{y+5}{3} \le x \le \sqrt{25 - y^2}$$
olduğundan:
$$\bar{y} = \frac{\int_{-5}^{4} y\left(\sqrt{25 - y^2} - \frac{y+5}{3}\right) dy}{\frac{25\pi}{4} + \frac{25}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5} - \frac{15}{2}} = \frac{-\frac{1}{3}(25 - y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{6}y^2 - \frac{1}{9}y^3\Big|_{-5}^{4}}{\frac{25\pi}{4} + \frac{25}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5} - \frac{15}{2}} = \frac{-\frac{45}{2}}{\frac{25\pi}{4} + \frac{25}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5} - \frac{15}{2}}$$
$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-5}^{4}\left(25 - y^2 - \left(\frac{y+5}{3}\right)^2\right) dy}{\frac{25\pi}{4} + \frac{25}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5} - \frac{15}{2}} = \frac{\frac{100}{9}y - \frac{5}{18}y^2 - \frac{5}{27}y^3\Big|_{-5}^{4}}{\frac{25\pi}{4} + \frac{25}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5} - \frac{15}{2}} = \frac{\frac{135}{2}}{\frac{25\pi}{4} + \frac{25}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5} - \frac{15}{2}}$$
Veya:
$$B:\quad 0 \le x \le 5,\ -\sqrt{25 - x^2} \le y \le f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & x \le 3 \\ \sqrt{25 - x^2} & x \ge 3 \end{cases}$$
olduğundan
$$\bar{x} = \frac{\int_0^3 x\left((3x - 5) - \sqrt{25 - x^2}\right) dx + \int_3^5 x\left(\sqrt{25 - x^2} - (-\sqrt{25 - x^2})\right) dx}{\frac{25\pi}{4} + \frac{25}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5} - \frac{15}{2}}$$
$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\left(\int_0^3\left((3x - 5)^2 - \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2\right) dx + \int_3^5\left(\left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 - \left(-\sqrt{25 - x^2}\right)^2\right) dx\right)}{\frac{25\pi}{4} + \frac{25}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5} - \frac{15}{2}}$$
B, kirişe dik olan (ve çemberin merkezinden geçen) $y = -\frac{1}{3}x$ doğrusuna (Şekildeki kırmızı doğru) göre simetrik olduğundan, $\bar{y} = -\frac{1}{3}\bar{x}$ olur. Bunun sonucu olarak, ağırlık merkezinin iki koordinatından biri, yukarıdaki formüllerden biri ile hesaplandığında, diğeri simetriden kolayca bulunur.

4. (a) $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3xy + 1$ diferansiyellenebilir olduğundan $\nabla f = (2x - 3y)\vec{i} + (y^2 - 3x)\vec{j}$, teğete diktir. $(1, 1)$ noktasında $\nabla f = -i$ olduğundan teğet denklemi $(-1)(x - 1) + 0(y - 1) = 0$ yani $x = 1$ (düşey) doğrusudur.

   (b) $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ Mutlak Yakınsak olsun. Bu, $\sum |a_n|$ ve $\sum |b_n|$ serilerinin yakınsak olması demektir. Yakınsak serilerin toplamı da yakınsak olduğundan $\sum (|a_n| + |b_n|)$ da yakınsaktır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \le |a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n|$ olduğundan, Karşılaştırma Testinden, $\sum |a_n + b_n|$ da yakınsak olur. Dolayısıyla $\sum (a_n + b_n)$ mutlak yakınsaktır.

5. $f(x,y) = 2y^3 - xy^2 + 3x^2 - 32x$ için $\frac{\partial f}{\partial x} = -y^2 + 6x - 32 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 - 2xy = 2y(3y - x) = 0$ olması için $y = 0$ veya $x = 3y$ olmalıdır. $y = 0$ iken $x = \frac{16}{3}$, $x = 3y$ iken $y = 2$, $(x = 6)$ ve $y = 16$, $(x = 48)$ bulunur. Kritik noktalar: $(\frac{16}{3}, 0)$, $(6,2)$, $(48,16)$ dır.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y - 2x$ dir.
$\Delta(x,y)$ (veya $g(x,y)$)$= 6(12y - 2x) - 4y^2$ bulunur.

(a) $(\frac{16}{3}, 0)$ için $\Delta < 0$ olduğundan burada eyer noktası vardır, yerel ekstremum yoktur.

(b) $(6,2)$ için $\Delta > 0$ olduğundan ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6,2) = 6 > 0$ olduğundan bu noktada yerel minimum vardır.

(c) $(48,16)$ için $\Delta < 0$ olduğundan burada eyer noktası vardır, yerel ekstremum yoktur.

6. (a) $f(x) = \frac{1}{x(2+\ln x)}$ olsun. $x \geq 1$ için f nin sürekli ve azalan olduğu ($x(2+\ln x)$, $[1,+\infty)$ de artan ve $x(2+\ln x) > 0$ olduğundan) aşikardır. ($t \geq 1$ için)

$$\int_1^t \frac{1}{x(2+\ln x)}\,dx = \ln|2+\ln x|\Big|_1^t = \ln|2+\ln t| - \ln 2$$

olduğundan

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x(2+\ln x)}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \ln|2+\ln t| - \ln 2 = +\infty$$

elde edilir. Dolayısıyla $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(2+\ln x)}\,dx$ (I. tip) özge integrali ıraksaktır. İntegral testinden,
$\sum \frac{1}{n(2+\ln n)}$ sonsuz serisi ıraksaktır.

(b) $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ olsun. e^{t^2} tüm $\mathbb{R}$ de sürekli olduğundan, Diferansiyel-İntegral Hesabın Temel Teoreminin 2. Şeklinden, (her $x \in \mathbb{R}$ için) $G'(x) = e^{x^2}$ olur. $F(x) = G(2x - x^2)$ olduğundan (Zincir Kuralından) $F'(x) = G'(2x - x^2)(2 - 2x) = (2 - 2x)e^{(2x-x^2)^2}$ olur. Buradan, F nin yegane kritik sayısının $x = 1$ olduğu görülür.
$F''(x) = (-2)e^{(2x-x^2)^2} + 2(2x - x^2)(2 - 2x)^2 e^{(2x-x^2)^2}$, $F''(1) = -2e < 0$
olduğundan, 2. Türev testinden, F, 1 de bir yerel maksimuma ulaşır.

7. (a) $P(x,y) = \frac{y}{x} - \frac{1}{y} + x$, $Q(x,y) = \ln x + \frac{x}{y} + y$ olsun. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ olur. $\frac{\partial P}{\partial y}$ ve $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sürekli ama $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ olduğundan $P\,dx + Q\,dy$ formu (2. Basamak Karışık Kısmi Türevlerin Eşitliği Teoreminden) tam diferansiyel olamaz (veya kısaca kapalı olmadığı için tam diferansiyel olamaz).

(b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} + ye^x + \sin x$ olması gerektiği için

$$f(x,y) = \int \left(\frac{2x}{x^2+y^2} + ye^x + \sin x \right) dx = \ln(x^2+y^2) + ye^x - \cos x + \phi(y)$$

olmalıdır.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} + y^2 + e^x$$

olması gerekir.

$$\frac{2y}{x^2+y^2} + e^x + \phi'(y) = \frac{2y}{x^2+y^2} + y^2 + e^x$$

eşitliğinden $\phi'(y) = y^2$ ve buradan $\phi(y) = \frac{1}{3}y^3 + C$ bulunur. Dolayısıyla, $f(x,y) = \ln(x^2+y^2) + ye^x - \cos x + \frac{1}{3}y^3 + C$ olmalıdır.