MT 132 ANALİZ II FİNAL (2011) SINAVI ÇÖZÜMLER

1. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ dir. Binom Teoreminden $(1+t)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} t^n$, ($|t| < 1$ için) olduğundan, ($t = -x^2$ alarak) $f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}$, ($|x| < 1$ için) elde edilir. $g(x) = f'(x)$ olsun, $f^{(191)}(0) = g^{(190)}(0)$ olur. $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (ve yakınsaklık yarıçapı>0 ise) $g^{(190)}(0) = 190! a_{190}$ olduğundan $f^{(191)}(0) = g^{(190)}(0) = -190! \binom{-\frac{1}{2}}{95}$ olur.

2. (a) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\sqrt[3]{(\ln x)^2}}\,dx$, $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{(\ln x)^2}}\,dx$ şeklinde (sırasıyla II. tip ve I. tip özge integraller) olarak parçalayabiliriz.

$$\int \frac{1}{x\sqrt[3]{(\ln x)^2}}\,dx \overset{u=\ln x}{=} \int u^{-\frac{2}{3}}\,du = 3u^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{\ln x} + C \text{ olduğundan}$$

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_e^t \frac{1}{x\sqrt[3]{(\ln x)^2}}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left(3\sqrt[3]{\ln t} - 3\right) = +\infty$ bulunur. Dolayısıyla 2. integral ıraksaktır. I. veya II. tip olmayan özge integraller için yakınsaklık tanımımızdan, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{(\ln x)^2}}\,dx$ özge integrali ıraksaktır.

(b) $z = \tan\frac{x}{2}$ olsun. $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$ olur.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{3\cos x + 4\sin x}\,dx &= \int \frac{2\,dz}{3+8z-3z^2} = \int \left(\frac{3}{5(3z+1)} - \frac{1}{5(z-3)}\right) dz = \frac{1}{5}\left(\ln|3z+1| - \ln|z-3|\right) + C \\ &= \frac{1}{5}\left(\ln\left|3\tan\frac{x}{2} + 1\right| - \ln\left|\tan\frac{x}{2} - 3\right|\right) + C\end{aligned}$$

3. $B:\ 0 \le x \le 2,\quad 1 - \frac{x}{2} \le y \le \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ olarak yazılabildiği için:

(a) $$\bar{x} = \frac{\int_0^2 x\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - \left(1-\frac{x}{2}\right)\right)dx}{\int_0^2 \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - \left(1-\frac{x}{2}\right)\right)dx}, \quad \bar{y} = \frac{\int_0^2 \frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{4} - \left(1-\frac{x}{2}\right)^2\right)dx}{\int_0^2 \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - \left(1-\frac{x}{2}\right)\right)dx}$$

(b) x ekseni etrafında (Disk yöntemi ile); $V = \displaystyle\int_0^2 \pi\left(1 - \frac{x^2}{4} - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2\right)dx$

y ekseni etrafında (Silindirik Kabuklar yöntemi ile); $V = \displaystyle\int_0^2 2\pi x\left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \left(1 - \frac{x}{2}\right)\right)dx$

4. $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ için, $r = 1 + \cos\theta$ kardiyoidi, normal eksenin sağında kalır.

(a)

$$\begin{aligned}L &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2}\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\,d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4\sin\frac{\theta}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\theta)^2\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = \left(\frac{3\theta}{2} + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4} + 2\end{aligned}$$

5. Kritik Noktaları: $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 2xy = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 + 6y - 32 = 0$ dan $2x(3x - y) = 0 \Rightarrow x = 0$ veya $y = 3x$ olur. $x = 0$ ise 2. denklemden $y = \frac{16}{3}$,

$y=3x$ ise 2. denklemden $x^2-18x+32=0 \Rightarrow x=2$ veya $x=16$ bulunur. $x=2$ için $y=6,\ x=16$ için $y=48$
Kritik Noktalar:$(0,\frac{16}{3}),(2,6),(16,48)$ dir.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x-2y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial}=-2x, \quad g(x,y)=\begin{vmatrix} 12x-2y & -2x \\ -2x & 6 \end{vmatrix}=4(18x-3y-x^2)$$

$g(0,\frac{16}{3})<0$ olduğundan, $(0,\frac{16}{3})$ de eyer noktası vardır.
$g(2,6)>0$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,6)>0$ olduğundan, $(2,6)$ de yerel minimum vardır.
$g(16,48)<0$ olduğundan, $(16,48)$ de de eyer noktası vardır.

6. (a) $f(x,y)=x^3-xy+y^3$ ve $g(x,y)=x^4+x^3y^2-2y^4$ olsun. Bu eğriler f ve g nin kesit eğrileridir. $P(1,1)$ noktası her iki eğrinin de üzerindedir. f ve g (Polinom oldukları için) her yerde diferansiyellenebilirdir. $\vec{u}=(\nabla f)_P=2\vec{i}+2\vec{j}\neq 0$ ve $\vec{v}=(\nabla g)_P=7\vec{i}-6\vec{j}\neq 0$ teğet doğrularına dik vektörlerdir. Bu nedenle aralarındaki açı, teğetler arasındaki açı ile aynıdır.Aralarındaki açının kosinüsü: $\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{1}{\sqrt{170}}$ olur.

   (b) $f(x,y)=\int\left(x^2e^{xy}+y^2\right)dy=xe^{xy}+\frac{y^3}{3}+\phi(x)$ olur. $\frac{\partial f}{\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}+\phi'(x)=e^{xy}+xye^{xy}+\frac{1}{1+x^2}$ olması gerektiğinden $\phi'(x)=\frac{1}{1+x^2}, \quad \phi(x)=\operatorname{Arctan}x+C$ bulunur. Dolayısıyla: $f(x,y)=xe^{xy}+\frac{y^3}{3}+\operatorname{Arctan}x+C$ olmalıdır.