SORULAR

Aşağıdaki dizlerin monoton ve sınırlı olduklarını gösteriniz.

1. $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$

2. $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$

ÇÖZÜMLER

1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n^2 - 2a_{n+1}a_n + 2 = 0$ olur. Yani a_n, $x^2 - 2a_{n+1}x + 2 = 0$ denkleminin bir (gerçel) köküdür. Öyleyse $\Delta = (-2a_{n+1})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \geq 0$ olur. Bu da, her $n > 1$ için $a_n \geq \sqrt{2}$ olması demektir. $a_1 \geq \sqrt{2}$ olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq \sqrt{2}$ olur.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{a_n} - a_n\right) = \frac{(2 - a_n^2)}{2a_n} \leq 0$$

olur. Bu da (a_n) dizisinin azalan olması demektir.

2. $a_1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dir.
Bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ise } a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} < \sqrt{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

olur. Dolayısıyla tümevarımla her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olur. (a_n) sınırlı bir dizidir.
Her $n \in \mathbb{N}$ için ($a_n > 0$ olduğu kullanılarak)

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{1 + a_n} - a_n = \frac{1 + a_n - a_n^2}{\sqrt{1 + a_n} + a_n} = \frac{-\left(a_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{1 + a_n} + a_n} > 0$$

olduğundan (a_n) artan bir dizidir. (Bu dizinin limiti olan $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısına *Altın Oran* denir.)