MT 131 Analiz I FİNAL SINAVI (2018-19) ÇÖZÜMLER

1. $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-1)$. Kritik sayılar: 0 (türev yok ama fonksiyon tanımlı),1 (türev=0)
$f''(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}(x+2)$ Büküm noktası adayları: $0, -2$

		-2		0		1	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$+$
		$\searrow$		$\Vert$	$\searrow$	$\vert$	$\nearrow$
$f''(x)$	$+$	$\vert$	$-$	$\Vert$	$+$	$+$	$+$
	$\smile$	$\vert$	$\frown$	$\Vert$		$\smile$	

f her iki kritik sayıda da sürekli,
I. Türev testinden, 1 de yerel minimum var,
I. Türev testinden, 0 da yerel ekstremum yok.
f, -2 de türevlenebildiği için teğeti var, -2 de bükeylik değişiyor: -2 de Büküm Noktası var.
0 da **düşey teğet var*** ve bükeylik değişiyor: 0 da da Büküm Noktası var.

(*:$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}-0}{x-0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^{\frac{1}{3}} - \frac{4}{x^{\frac{2}{3}}}\right) = 0 - \infty = -\infty$ ve f, 0 da sürekli)

2. (a) $\frac{0}{0}$ belirsizliği var. $\frac{d}{dx}(\mathrm{Arctan}(x^2) - x^2) = \dfrac{2x}{1+x^4} - 2x$, $\frac{d}{dx}(x^6) = 6x^5$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^4} - 2x}{6x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{3(1+x^4)} = \frac{-1}{3} \quad \text{L' Hospital in Kuralından: } \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Arctan}(x^2)-x^2}{x^6} = \frac{-1}{3}$$

(b) $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var. $\frac{d}{dx}(\ln(e^{2x}+e^x)) = \frac{2e^{2x}+e^x}{e^{2x}+e^x}$, $\frac{d}{dx}(3x+4) = 3$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}+e^x}{3(e^{2x}+e^x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{\cancel{2x}}(1+e^{-x})}{3e^{\cancel{2x}}(1+e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2(1+\frac{1}{e^x})}{3(1+\frac{1}{e^x})} = \frac{2(1+\frac{1}{+\infty})}{3(1+\frac{1}{+\infty})} = \frac{2}{3} \text{ olur.}$$

L' Hospital in Kuralından, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(e^{2x}+e^x)}{3x+4} = \dfrac{2}{3}$ bulunur.

3. (a) $y = \coth^{-1}x$ olsun. $x = \coth y = \frac{\cosh y}{\sinh y} = \frac{e^y+e^{-y}}{e^y-e^{-y}}$ olur. Buradan, $e^{2y} = \frac{x+1}{x-1}$, $y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ bulunur. Bu da, $\coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ olması demektir.

(b) $y = \mathrm{Arccos}\, x$ olsun. $\cos y = x$ ve ($x > 0$ olduğu için) $0 \le y < \frac{\pi}{2}$ olur. $\sec y = \frac{1}{x}$ olur. $0 \le y < \pi$ olduğu için $\mathrm{Arcsec}\,\frac{1}{x} = y$ olur.
İkinci çözüm: $f(x) = \mathrm{Arccos}\, x$, $g(x) = \mathrm{Arcsec}\,\frac{1}{x}$ olsun. f ve g, $(0,1]$ **aralığında** sürekli ve bu aralığın iç noktalarında türevlenebilirdir. Her $0 < x < 1$ için $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ve

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\left|\frac{1}{x}\right|\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}} = \frac{-\frac{1}{|x|^2}}{\frac{1}{|x|}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} = \frac{-1}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = f'(x)$$

dir. O.D.T. nin bir sonucundan, her $0 < x \le 1$ için, $f(x) = g(x) + C$ olacak şekilde bir C sayısı vardır. $f(1) = \mathrm{Arccos}\, 1 = 0 = \mathrm{Arcsec}\, 1 = g(1)$ olduğu için, $C = 0$ olur. Bu da, her $0 < x \le 1$ için $f(x) = g(x)$ olması demektir.

4. Ters Fonksiyonun Türevlenebilmesi teoreminden, $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ olduğu için, her $x \in T(g) = \mathrm{Gör}(f)$ için $g'(x) < 0$ olup, g de $T(g) = \mathrm{Gör}(f)$ de kesin azalandır.
$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ özdeşliğinde her iki tarafın türevi (sağ taraf türevlenebiliyor) alınırsa, $g''(x) = \dfrac{-f''(g(x))g'(x)}{(f'(g(x)))^2}$ elde edilir.
$x < b$ için $g(x) > g(b) = a$ ve $f''(g(x)) > 0$ ve $g'(x) < 0$ oluşundan, $g''(x) > 0$ olur. g, $(-\infty, b)$ aralığında yukarı bükeydir.
$x > b$ için $g(x) < g(b) = a$ ve $f''(g(x)) < 0$ ve $g'(x) < 0$ oluşundan, $g''(x) < 0$ olur. g, $(b, +\infty)$ aralığında aşağı bükeydir.
Ayrıca g; b de türevlenebildiği için, b de teğeti vardır. Bunlar da, g nin b de bir Büküm Noktasına sahip olması için gereken koşullardır.

5. (a) $f(x)=\frac{x\ln x}{x^2-1}$ fonksiyonu sürekli ve $T(f)=(0,1)\cup(1,+\infty)$ olduğu için $x=0,\ x=1$ dışında bir düşey asimptotu olamaz.

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{-\ln t}{t}$ limitinde $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var. $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t}=0$. L' Hospital in Kuralından, $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$. Buradan $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$ olur (Uygulamada, başka yoldan, gösterilmişti).
Bu nedenle $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x}{x^2-1}=\dfrac{0}{-1}=0$ olur. 0 da düşey asimptot yoktur.

ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x+1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$ ($\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$ olduğu, Logaritmanın Özellikleri Teoreminin bir parçası idi. L'Hospital Kuralı ile de gösterilebilir). 1 de düşey asimptot yoktur.

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$ de $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+1}{2x}$ yine $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{+\infty}=0$ olduğu için L'Hospital in Kuralından, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln x}{x^2-1}=0$ bulunur. Bu da $y=0$ doğrusunun yatay asimptot olması demektir.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$ limitinde $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var.

$\ln\left((e^x+3^x)^{\frac{1}{x}}\right)=\frac{\ln(e^x+3^x)}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+3^x)}{x}$ limitinde yine $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var.

$\frac{d}{dx}(\ln(e^x+3^x))=\frac{e^x+3^x\ln 3}{e^x+3^x}$, $\frac{d}{dx}(x)=1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+3^x\ln 3}{e^x+3^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{3^x}\left(\left(\frac{e}{3}\right)^x+\ln 3\right)}{\cancel{3^x}\left(\left(\frac{e}{3}\right)^x+1\right)}\overset{*}{=}\frac{0+\ln 3}{0+1}=\ln 3$$

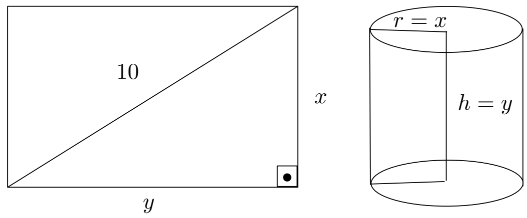
($*:\ 0<e<3$ olduğu için $0<\frac{e}{3}<1$ ve $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^x=0$ olur (bir teoremde vardı).)
L'Hospital in Kuralından, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+3^x)}{x}=\ln 3$ olur.
$(e^x+3^x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{\ln(e^x+3^x)}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+3^x)}{x}=\ln 3$ ve exp fonksiyonu $\ln 3$ de sürekli olduğundan, Bileşkenin Limiti Teoreminden, $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+3^x)^{\frac{1}{x}}=\exp(\ln 3)=e^{\ln 3}=3$ bulunur.

6. $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}},\ b=7,\ a=8$ olsun.
f, $(0,+\infty)$ aralığında en az 4 kez (aslında istendiği kadar=sonsuz kez) türevlenebilirdir.
$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\ f''(x)=\frac{-2}{9}x^{-\frac{5}{3}},\ f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$ $\quad f(8)=2,\ f'(8)=\frac{1}{12},\ f''(8)=\frac{-1}{144},\ f'''(8)=\frac{5}{3^3 2^7}$

$$P_3(x)=2+\frac{1}{12}(x-8)-\frac{1}{288}(x-8)^2+\frac{5}{3^4 2^8}(x-8)^3 \qquad \sqrt[3]{7}=f(7)\approx P_3(7)=2-\frac{1}{12}-\frac{1}{288}-\frac{5}{3^4 2^8}$$

Kalanlı Taylor Teoreminden Hata $=|R_3|=\left|\dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}(7-8)^4\right|$ olacak şekilde bir $7<c<8$ sayısı vardır.

$f^{(4)}(x)=\frac{-80}{81}x^{-\frac{11}{3}}$, Hata $=\frac{80}{81\cdot 4!\,c^{\frac{11}{3}}}$ olur. Kaba bir hesapla, $c>7$ olduğu için $c^{\frac{11}{3}}>7$ olup, Hata$<\frac{10}{7\cdot 3^5}$ olur. (Aslında, hata bu sayıdan çok daha küçüktür. $\frac{11}{3}>3+\frac{1}{2}$ olduğundan $c^{\frac{11}{3}}>c^3c^{\frac{1}{2}}>2\cdot 7^3$ oluşundan hata$<\frac{10}{2\cdot 3^5\cdot 7^3}$ olduğu görülür.)

7. 

Silindirin Hacmi maksimum yapılacak. $V = \pi r^2 h$

$r = x,\ h = y \quad V = \pi x^2 y \qquad x^2 + y^2 = 10, \quad x^2 = 100 - y^2$

$V = \pi(100 - y^2)y$ maksimum yapılacak.

$0 < y < 10$ aralığında olmalı.

$f(y) = \pi(100y - y^3),\ (0, 10)$ aralığında maksimum yapılacak.

$f'(y) = \pi(100 - 3y^2) = 0$ Kritik Sayılar: $y = \frac{\pm 10}{\sqrt{3}}$

Bunlardan sadece $\frac{10}{\sqrt{3}} \in (0, 10)$ olur.

	0		$\frac{10}{\sqrt{3}}$		10
$f'(y)$		$+$		$-$	
		$\nearrow$		$\searrow$	

f, $\frac{10}{\sqrt{3}}$ de sürekli olduğundan, $(0, 10)$ aralığındaki maksimum değerine, yandaki tablodan görüldüğü gibi, $y = \frac{10}{\sqrt{3}}$ de erişir.

$x^2 + y^2 = 100$ oluşundan $x = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ bulunur.