MT 131 ANALİZ I (2018-19) ARA SINAV ÇÖZÜMLER

1.

$$\begin{aligned} T(f) &= \{x \in \mathbb{R} : x-6 \geq 0,\ x^2+x \geq 0,\ \sqrt[3]{x-8} \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 6,\ x(x+1) \geq 0,\ x \neq 9\} = [6,+\infty) \cap ((-\infty,-1] \cup [0,+\infty)) \setminus \{9\} \\ &= [6,+\infty) \setminus \{9\} = [6,9) \cup (9,+\infty) \end{aligned}$$

2.

$$G(g) = \{y \in \mathbb{R} : y = \frac{x+1}{x^2-2x} \text{ olacak şekilde (en az) bir } x \in T(g) \text{ vardır}\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : y(x^2-2x) = x+1 \text{ şekilde (en az) bir } x \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\} \text{ vardır}\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : yx^2 - (2y+1)x - 1 = 0 \text{ olacak şekilde (en az) bir } x \in \mathbb{R} \text{ vardır}\}$$

(Bu soruda, $y = 0$ durumunu ayrı incelemek gerekir ama sonucun değişmediğini kontrol edebilirsiniz)

$$= \{y \in \mathbb{R} : \Delta = (2y+1)^2 + 4y \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} : (2y+2)^2 \geq 3\} = \{y \in \mathbb{R} : |y+1| \geq \tfrac{\sqrt{3}}{2}\}$$

$$= (-\infty, -1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}] \cup [-1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}, +\infty)$$

3.

$$\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x^2+8}-3} = \frac{(\sqrt[3]{x+7}-2)(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4)(\sqrt{x^2+8}+3)}{(\sqrt{x^2+8}-3)(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4)(\sqrt{x^2+8}+3)}$$

$$= \frac{(x+7-8)(\sqrt{x^2+8}+3)}{(x^2+8-9)(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)}{(x-1)(x+1)(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+8}+3}{(x+1)(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4)} \quad (x \neq 1 \text{ için})$$

Limitin Temel Özelliğinden,

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x^2+8}-3} = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^2+8}+3}{(x+1)(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4)} \stackrel{*}{=} \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \quad (* : \text{Limit Teoremleri})$$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3-6x^2}+x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{6}{x}\right)}+1\right) \stackrel{*}{=} (-\infty)\cdot 2 = -\infty$ ($*$: Limit Teoremleri)

5. Her $x \in \mathbb{R}$ için $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ dir.

   Her $x > 1$ için ($x - 1 > 0$ olduğu için) $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\lfloor x \rfloor} < \frac{1}{x-1}$

   Her $x > 1$ için ($2x + 1 > 0$ olduğu için) $\frac{2x+1}{x} \leq \frac{2x+1}{\lfloor x \rfloor} < \frac{2x+1}{x-1}$ olur.

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right) \stackrel{*}{=} 2 \text{ ve } \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \stackrel{*}{=} 2 \ (* : \text{Limit Teoremleri})$$

   olduğundan, Sıkıştırma Teoreminden, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\lfloor x \rfloor} = 2$ olur.

6. $t = x - \pi$ olsun. $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi) = 0$ ve $x \neq \pi$ için $t \neq 0$ olur. ($x = t + \pi$ olduğundan)

$$\frac{\sin(x-\frac{\pi}{2})-1}{(x-\pi)\sin x} = \frac{\sin(t+\frac{\pi}{2})-1}{t\sin(t+\pi)} = \frac{\cos t - 1}{-t\sin t} = \frac{1-\cos t}{t\sin t} = \frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{t\sin t(1+\cos t)} = \frac{\sin^2 t}{t\sin t(1+\cos t)} = \frac{\sin t}{t(1+\cos t)}$$

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$ ve $\lim\limits_{t\to 0}\cos t=1$ olduğu için, Limit Teoreminden, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t(1+\cos t)}=\dfrac{1}{2}$ olur.

Limit için Değişken Değiştirme Teoreminden, $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{2})-1}{(x-\pi)\sin x}=\dfrac{1}{2}$ olur.

7. $f(x)=\sec x-x,\ \lambda=2$ olsun. (Teoremlerden) f sürekli fonksiyondur.

   $f(0)=1<2=\lambda$ ve $f(-\frac{\pi}{3})=2+\frac{\pi}{3}>2=\lambda$ olur.

   $[-\frac{\pi}{3},0]\subset T(f)$ ve f sürekli fonksiyon olduğu için, f, $[-\frac{\pi}{3},0]$ aralığında süreklidir.

   $f(0)<2<f(-\frac{\pi}{3})$ olduğu için Ara Değer Teoreminden, $f(c)=\lambda=2$ olacak şekilde en az bir $c\in(-\frac{\pi}{3},0)$ vardır. Bu c nin, $\sec x-x=2$ denkleminin bir çözümü olduğu aşikardır.

8. $a\in T(f)$ olsun. Eğer, her $\varepsilon>0$ için:

$$|x-a|<\delta\quad(\text{ve } x\in T(f))\text{ olduğunda }\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

   olacak şekilde (ε a bağlı) (en az) bir $\delta>0$ var (bulunabiliyor) ise f, a noktasında süreklidir deriz.

   Verilen fonksiyon için $T(f)=\mathbb{R}$ dir.

   $|\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{0}|=\sqrt[5]{|x|}\overset{*}{<}\sqrt[5]{\delta}\overset{**}{=}\varepsilon$ (*: $|x-0|<\delta$ iken, **: δ seçiminden)

   ($\sqrt[5]{\delta}=\varepsilon$ olması için) $\delta=\varepsilon^5$ seçildiğinde istenen koşulun sağlanacağı, zaten yukarıda gösterilmiştir.

9. (a) $a=1$ olsun. Her $1<x<\sqrt{2}$ için ($\lfloor x^2\rfloor=1$ olur ve) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ olur.

   (Tek Taraflı Limitlerin Temel Özelliğinden) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}$ olur.

   $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$ ve her $x>1$ için $\frac{1}{x-1}>0$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$ olur.

   f, 1 de sonsuz tipi süreksizliğe sahiptir.

   (b) $a=2$ olsun. Her $2<x<\sqrt{5}$ için ($\lfloor x^2\rfloor=4$ olur ve) $f(x)=\frac{4}{x-1}$ olur.(Tek Taraflı Limitlerin Temel Özelliğinden) $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{4}{x-1}$ olur. Teoremlerden (Rasyonel Fonksiyonların Limiti ve Tek/Çift Taraflı Limit İlişkisi Teoremleri) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{4}{x-1}=4$ olur.

   Her $\sqrt{3}<x<2$ için ($\lfloor x^2\rfloor=3$ olur ve) $f(x)=\frac{3}{x-1}$ olur. (Tek Taraflı Limitlerin Temel Özelliğinden) $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{3}{x-1}$ olur. Teoremlerden (Rasyonel Fonksiyonların Limiti ve Tek/Çift Taraflı Limit İlişkisi Teoremleri) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{3}{x-1}=3$ olur. Böylece, f nin, 2 de, sıçrama tipi süreksizliğe sahip olduğu gösterilmiş olur.

10. (Tek Taraflı Limitlerin Temel Özelliği ve Limit Teoremlerinden) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x+1}=1$ olur.

   (Tek Taraflı Limitlerin Temel Özelliği ve Limit Teoremlerinden) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-x)=0$ olur.

   (Tek/Çift Taraflı Limit İlişkisi Teoreminden) Sağ ve sol limitler farklı olduğu için f nin, 0 da limiti yoktur.

   f; 0 ı içeren bir açık aralıkta tanımlı, ama 0 da limiti olmadığı için (Süreklilik için Limit Kriterinden) 0 da süreksizdir.

   Türevlenebilen Fonksiyonların sürekli oluşu teoreminden, f, 0 da türevlenemez.