MT 131 Analiz I Ara Sınav Çözümler

1.

$$\begin{aligned} T(f) &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x \geq 0,\ x \geq 0,\ \sqrt{x^2-x} - 2\sqrt{x} \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x(x-1) \geq 0,\ x \geq 0\} \setminus \{x : \sqrt{x^2-x} = 2\sqrt{x}\} \\ &= \{x : x(x-1) \geq 0\} \cap \{x : x \geq 0\} \setminus \{x : \sqrt{x^2-x} = 2\sqrt{x}\} \\ &= (((-\infty, 0] \cup [1, +\infty)) \cap [0, +\infty)) \setminus \{0, 5\} \\ &= (\{0\} \cup [1, +\infty)) \setminus \{0, 5\} = [1, 5) \cup (5, +\infty) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{Gör}(g) &= \{y \in \mathbb{R} : y = \frac{x^2+1}{x-1} \text{ olacak şekilde en az bir } x \in \mathrm{T}(f) \text{ vardır}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : y(x-1) = x^2 + 1 \text{ olacak şekilde en az bir } x \in \mathrm{T}(f) \text{ vardır}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : x^2 - yx + (y+1) = 0 \text{ olacak şekilde en az bir } x \in \mathbb{R} \text{ vardır}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \Delta = (-y)^2 - 4(y+1) \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} : y^2 - 4y - 4 \geq 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : (y-2)^2 - 8 \geq 0\} = (-\infty, 2 - \sqrt{8}\,] \cup [2 + \sqrt{8}, +\infty) \end{aligned}$$

3. $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$ olsun. $f,\ I$ aralığında artan olduğu için $f(x_1) \leq f(x_2)$ olur.
$g,\ I$ aralığında azalan olduğu için $g(x_1) \geq g(x_2)$ olur. Buradan, $-g(x_1) \leq -g(x_2)$ olur.
Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanarak $f(x_1) - g(x_1) \leq f(x_2) - g(x_2)$ elde edilir.
Bu da, $(f-g)(x_1) \leq (f-g)(x_2)$ olması demektir.
Böylece, $f - g$ nin I aralığında artan olduğu gösterilmiş olur.

4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ olduğu için, sonsuz limit tanımından, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ ve "a yakınında" (yani a yı içeren bir açık aralıkta, belki a hariç) $f(x) > 0$ olur.
$\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ ve $L > 0$ olduğu için 2. (Teorik) Teoremimizden, ("limit pozitif ise fonksiyon da, a yakınında pozitifdir" Teoremi) a yı içeren bir açık aralıkta (belki a hariç) $g(x) > 0$ olur.
Bu iki açık aralığın arakesiti, a yı içeren bir açık aralıktır ve bu açık aralıkta,
belki a dışında $f(x)g(x) > 0$ olur.
Limit Teoreminden ($L \neq 0$ olduğunu da kullanarak), $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{1}{f(x)}}{g(x)} = \dfrac{0}{L} = 0$ olur.
Böylece $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$ olduğu gösterilmiş olur.

5. Her $x \neq 0$ için $\dfrac{\sin(x^2-x)}{x-1} = \dfrac{\sin(x^2-x)}{x^2-x}\, x$ dır.
Limitin temel özelliğinden
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x^2-x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\sin(x^2-x)}{x^2-x}\, x\right)$ olur.
$t = x^2 - x$ olmak üzere değişken değişikliği yapacağız.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - x) = 0$ (Polinomun Limiti)

(b) $x \in (0, +\infty),\ x \neq 1$ için $x^2 - x \neq 0$

(c) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ (Bu da bir Teorem)

olduğu için Limitler için Değişken Değiştirme Teoreminden $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sin(x^2-x)}{x^2-x} = 1$ olur.
$\lim_{x\to 1} x = 1$ (Bu da bir teorem) olduğundan,
Limit Teoreminden: $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sin(x^2-x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\sin(x^2-x)}{x^2-x} \lim_{x\to 1} x = 1 \cdot 1 = 1$ bulunur.

6. Tam Değer fonksiyonunun tanımından, her $x \in \mathbb{R}$ için, $2x < \lfloor 2x+1 \rfloor \leq 2x+1$ olduğunu biliyoruz. Her $x > 1$ için ($x^2-1>0$ olduğu için) $\dfrac{2x}{x^2-1} < \dfrac{\lfloor 2x+1 \rfloor}{x^2-1} \leq \dfrac{2x+1}{x^2-1}$ olur. Limit teoremlerinden:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}} = \frac{2-\frac{1}{+\infty}}{+\infty-\frac{1}{+\infty}} = \frac{2}{+\infty} = 0 \text{ ve } \lim_{x\to 1} \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{x-\frac{1}{x}} = \frac{2}{+\infty-\frac{2}{+\infty}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

olduğu için, Sıkıştırma teoreminden, $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\lfloor 2x+1 \rfloor}{x^2-1} = 0$ olur.

7. Her $x \neq 2$ için:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2x+5}-3}{\sqrt[3]{x+6}-2} &= \frac{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)}{(\sqrt[3]{x+6}-2)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)(\sqrt[3]{x+6}+2)} \\
&= \frac{2(x-2)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)} = \frac{2(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)}{\sqrt{2x+5}+3}
\end{aligned}$$

olduğu için (İlk eşitlik, Limitin Temel Özelliğinden)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x+5}-3}{\sqrt[3]{x+6}-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)}{\sqrt{2x+5}+3} \overset{\text{Limit Teoremleri}}{=} \frac{2(4+4+4)}{3+3} = 4 \text{ olur.}$$

8. $f(x) = \cos x - x^2 + 2$ olsun. Limit konusundaki teoremlerden, $f(x)$ (tüm $\mathbb{R}$ de tanımlı) sürekli bir fonksiyondur. $f(0) = 3 > 0$ ve $f(\pi) = 1 - \pi^2$ dir. $\pi > 3$ olduğu için $f(\pi) < 0$ olur. f, (tüm $\mathbb{R}$ de tanımlı) sürekli bir fonksiyon olduğu için $[0, \pi]$ aralığında süreklidir. $\lambda = 0$ için Ara Değer Teoreminin diğer hipotezi ($f(0) > \lambda$, $f(\pi) < \lambda$) sağlanır. Bu nedenle, Ara Değer Teoreminden, $f(c) = \lambda = 0$ olacak şekilde e az bir $c \in [0, \pi]$ sayısı vardır. Bu sayı, $\cos x = x^2 - 2$ denkleminin bir gerçel çözümüdür.

9. (a) $a = 1$ noktasında soldan limitini bulalım. $0 < x < 1$ için ($0 < x^2 < 1$ olduğundan) $f(x) = \dfrac{-1}{x-1}$ olur. (tek taraflı limitlerin temel özelliğinden) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{f(x)} = \lim_{x\to 1^-} (1-x) = 0$ ve $0 < x < 1$ için $f(x) > 0$ olduğu için $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\lfloor x^2 \rfloor - 1}{x-1} = +\infty$ olur. f, 1 de sonsuz tipi süreksizliğe sahiptir.

   (b) Her $\sqrt{3} < x < 2$ için $f(x) = \frac{2}{x-1}$ olduğundan (tek taraflı limitlerin temel özelliğinden)
   $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{2}{x-1} = 2$ olur.
   Her $2 < x < \sqrt{5}$ için $f(x) = \frac{3}{x-1}$ olduğundan (tek taraflı limitlerin temel özelliğinden)
   $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{3}{x-1} = 3$ olur.
   (Her iki limit de var (=sayı) ama) $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$ olduğunu gösterdik. Bu nedenle f, 2 de sıçrama tipinde bir süreksizliğe sahiptir.