MT 131 ARA SINAV (2011) ÇÖZÜMLER

1. (a) $R_f = \{y \in \mathbb{R} : y = \dfrac{x+1}{x^2-2x}$ o.ş bir $x \in D_f$ vardır $\} = \{y \in \mathbb{R} : y(x^2-2x) = x+1$ o.ş bir $x \in D_f$ vardır $\}$
$= \{y \in \mathbb{R} : yx^2 - (2y+1)x - 1 = 0$ o.ş bir $x \in \mathbb{R}$ vardır $\} \overset{*}{=} \{y \in \mathbb{R} : (2y+1)^2 + 4y \geq 0\}$
$= \{y \in \mathbb{R} : 4y^2 + 8y + 1 \geq 0\} = \left(-\infty, \frac{-2-\sqrt{3}}{2}\right] \bigcup \left[\frac{-2+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$
*: $y = 0$ iken $\Delta \geq 0$ olur ve denklem birinci derecedir ve çözümü vardır

(b) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x \geq 0, \sqrt[3]{x+1} \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty), x \neq -1\}$
$= (-\infty, -1) \cup (-1, 0] \cup [3, +\infty)$

2. (a) $\displaystyle\lim_{x\to5} \frac{\sqrt{2x+15}-5}{\sqrt{x-1}-2} = \lim_{x\to5} \frac{(\sqrt{2x+15}-5)(\sqrt{2x+15}+5)(\sqrt{x-1}+2)}{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{2x+15}+5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x\to5} \frac{2(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{2x+15}+5)} =$
$\displaystyle\lim_{x\to5} \frac{2(\sqrt{x-1}+2)}{\sqrt{2x+15}+5} = \frac{4}{5}$

(b) $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$ olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} \leq \frac{\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x^2-x+1}} \leq \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

olur. Her $x < 0$ için $\sqrt{x^2-x+1} = -x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ olduğundan
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = -1$ ve
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} + \frac{1}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} \right) = -1$
olduğundan Sıkıştırma Teoreminden:
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{\sqrt{x^2-x+1}} = -1$ olur.

3. (a) $\varepsilon > 0$ verilsin.
$|\sin(x^2) - 0| = |\sin(x^2)| \leq |x^2| = |x|^2 \overset{|x|<\delta \text{ ise}}{<} \delta^2$ olur. Dolayısıyla $\delta^2 = \varepsilon$ seçmek yeterlidir. $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ alalım, $\delta > 0$ olur ve ($\delta^2 = \varepsilon$ olduğundan):

$$0 < |x - 0| < \delta \text{ iken } |\sin(x^2) - 0| < \varepsilon$$

olma koşulunun sağlandığı zaten yukarıda gösterilmiştir.

(b)

$$\lim_{x\to1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x-1}(\sqrt{x+3}+2) = \lim_{x\to1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x-1} \lim_{x\to1}(\sqrt{x+3}+2) = 4\lim_{x\to1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x-1}$$

$t = \frac{\pi(x-1)}{2}$ olsun. $\lim_{x\to1} \frac{\pi(x-1)}{2} = 0$ ve $x \neq 1$ için $\frac{\pi(x-1)}{2} \neq 0$ olur. $\lim_{t\to0} \frac{\sin t}{t} = 1$ olduğundan Limit için Değişken Değiştirme teoreminden:

$$\lim_{x\to1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{\sqrt{x+3}-2} = 4\lim_{x\to1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x-1} = 4\lim_{x\to1} \frac{-\sin(\frac{\pi(x-1)}{2})}{x-1} = 4\lim_{t\to0} \left(\frac{-\sin t}{t} \frac{\pi}{2} \right) = -2\pi$$

(Ya da önce $t = x - 1$ ardından $s = \frac{\pi t}{2}$ şeklinde iki değişken değişikliği yapılır)

4. (a) $f(x) = x^3 - \cot x,\ a = \frac{\pi}{6},\ b = \frac{\pi}{3},\ \lambda = 0$ olsun. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \subset D_f$ ve f, sürekli fonksiyon olduğundan, f, $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ aralığında süreklidir. ($3 < \pi < 4, \sqrt{3} > 1$ olduğundan) $f(a) = \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 - \sqrt{3} < \lambda < \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = f(b)$ olur. Ara Değer Teoreminden, $f(c) = \lambda = 0$ olacak şekilde bir $c \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ vardır. f tek fonksiyon olduğundan $f(-c) = 0$ (ve $-c \neq c$) olur. Dolayısıyla c ve $-c$, denklemin iki farklı çözümüdür.

(b) $(0, 1)$ aralığında $\lfloor x \rfloor = 0$ olduğundan $\lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{\lfloor x \rfloor - 3} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{-3} = 0$ olur ve $(0, 1)$ aralığında $\frac{\lfloor x \rfloor - 3}{\sin x} < 0$ olduğundan $\lim_{0^+} \frac{\lfloor x \rfloor - 3}{\sin x} = -\infty$ olur. Dolayısıyla f, 0 da sonsuz tipi süreksizliğe sahiptir.
$1 < x < 2$ için $f(x) = \frac{-2}{\sin x}$ olur ve $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{-2}{\sin x} = -\frac{2}{\sin 1}$.
$0 < x < 1$ için $f(x) = \frac{-3}{\sin x}$ olur ve $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{-3}{\sin x} = -\frac{3}{\sin 1}$ olur.
$\lim_{x\to1^+} f(x)$ ve $\lim_{x\to1^-} f(x)$ var ve farklı oldukları için f, 1 de sıçrama tipi süreksizliğe sahiptir.

5. (a) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{-2x - \Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2} = \dfrac{-2x}{x^4} = \dfrac{-2}{x^3}$ olur.

(b) Kapalı Türev alma yöntemi ile:

$$\left(-\sin\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y - xy'}{y^2}\right) + (2xy + x^2y') = 0$$

oluşundan

$$y' = \frac{\frac{\sin\frac{x}{y}}{y} - 2xy}{\frac{x\sin\frac{x}{y}}{y^2} + x^2} = \frac{y\sin\frac{x}{y} - 2xy^3}{x\sin\frac{x}{y} + x^2y^2}$$

bulunur.