MT 131 2004 Güz Ara Sınav Çözümler

1.a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-4x}}{x+1}$, $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 4x \geq 0, x+1 \neq 0\}$.
$x^3 - 4x = x(x-2)(x+2) \geq 0.$
$Ç.K. = [-2,0] \cup [2,+\infty)$.$D_f = [-2,0] \cup [2,+\infty) - \{-1\} = [-2,-1) \cup (-1,0] \cup [2,+\infty)$

b) $g(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$, $R_g = \{y$:Bir $x \in D_g$ için $y = \frac{x^2+1}{x+1}\} = \{y : y = \frac{x^2+1}{x+1}$ (x için) nin en az bir gerçel çözümü var$\}$

$y(x+1) = x^2+1$, (x için) nin en az bir gerçel çözümü var.

$x^2 - yx + (1-y) = 0$, (x için) nin en az bir gerçel çözümü var

gerçel çözüm ancak ve yalnız $\Delta \geq 0$ ise vardır, $\Delta = y^2 - 4(1-y) \geq 0$. $y^2 + 4y - 4 \geq 0$.
$y \in (-\infty, -2-\sqrt{8}\,] \cup [-2+\sqrt{8}, +\infty)$

$R_f = (-\infty, -2-\sqrt{8}\,] \cup [-2+\sqrt{8}, +\infty)$

2. a) $f(x) = x^3 + 100x^2 - 10x + 1$, $\lambda = 0$ olsun.

$f(0) = 1$, $f(-200) = -8000000 + 4000000 + 2000 + 1 = -3997999$, $a = -200$, $b = 0$ olsun. f, bir polinom olduğundan, her yerde dolayısıyla $[a,b] = [-200,0]$ aralığında süreklidir ve $-3997999 = f(a) < \lambda = 0 < f(b) = 1$ olur . Ara Değer Teoreminden en az bir $c \in (-200,0)$ için $f(c) = \lambda = 0$ olur. Bu c, f nin bir köküdür.

b) $g(x) = \frac{1}{x^2+x}$, $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ ve $x_1 < x_2$ olsun.
$g(x_1) - g(x_2) = \frac{1}{x_1^2+x_1} - \frac{1}{x_2^2+x_2} = \frac{(x_2^2+x_2)-(x_1^2+x_1)}{(x_1^2+x_1)(x_2^2+x_2)} = \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1+1)}{(x_1^2+x_1)(x_2^2+x_2)} > 0$ (Çünki $(x_2-x_1), (x_2+x_1+1)$ ve $(x_1^2+x_1), (x_2^2+x_2) > 0$). Bu da g nin $(0,+\infty)$ aralığında kesin azalan olması demektir.

3.a) $\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{17-x}} = \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{17-x})(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{17-x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{17-x})(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \frac{(x-8)(\sqrt{x+1}+\sqrt{17-x})}{(x+1-(17-x))(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}$
$= \frac{(x-8)(\sqrt{x+1}+\sqrt{17-x})}{(2x-16)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}$

$= \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{17-x}}{2(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}$ ($x \neq 8$ için) Buradan $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{17-x}} = \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{17-x}}{2(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}$ olduğu görülür.
$\lim_{x\to 8} x+1 = 9$, $\lim_{x\to 8} 17-x = 9$, $\lim_{x\to 8}\sqrt{x+1} = \sqrt{9} = 3$, $\lim_{x\to 8}\sqrt{17-x} = \sqrt{9} = 3$,
$\lim_{x\to 8} x^2 = 64$, $\lim_{x\to 8}\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{64} = 4$, $\lim_{x\to 8}\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{8} = 2$

$\lim_{x\to 8}(\sqrt{x+1}+\sqrt{17-x}) = 3+3 = 6$, $\lim_{x\to 8} 2(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4) = 2(4+4+4) = 24$,

$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{17-x}} = \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{17-x}}{2(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

b) $\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{(x-\pi)\sin x}$
$=\lim_{x\to\pi} \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(x-\pi)\sin x(1-\cos x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{1-\cos^2 x}{(x-\pi)\sin x(1-\cos x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{(x-\pi)\sin x(1-\cos x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{(x-\pi)(1-\cos x)}$

$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} \overset{t=x-\pi}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t+\pi)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{t} = -1$ olduğundan
$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} \frac{1}{(1-\cos x)} = -1 \bullet \frac{1}{1-(-1)} = \frac{-1}{2}$

4.a) $x > 0$ için $\frac{x}{x^2+1} > 0$ ve her x için $-1 \leq \cos x \leq 1$ olduğundan ($x > 0$ için) ,
$\frac{-x}{x^2+1} \leq \frac{x\cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$ olur. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$ olduğundan

$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$, Sandviç Teoreminden $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1} = 0$ olur.

b) $f(x) = \left[\frac{2}{x^2+1}\right]$,($\frac{2}{x^2+1}$ her yerde, tam değer fonksiyonu tamsayılar dışında sürekli olduğundan) $\frac{2}{x^2+1} \notin \mathbb{Z}$ için bu fonksiyon süreklidir. $x^2+1 \geq 1$ olduğundan ($\frac{2}{x^2+1} \in \mathbb{Z}$ ise) $\frac{2}{x^2+1} = 1$ veya 2 olabilir. $\frac{2}{x^2+1} = 1$ ancak $x = \pm 1$, $\frac{2}{x^2+1} = 2$ ancak $x = 0$ iken olabilir. Bu sayılar dışında f süreklidir.

$-1 < x < 1$ ($x \neq 0$) için $1 < \frac{2}{x^2+1} < 2$ ve $\left[\frac{2}{x^2+1}\right] = 1$ olduğundan
$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{x^2+1}\right] = \lim_{x\to 0} 1 = 1$ ve $f(0) = 2$ olduğundan f, $a = 0$ da kaldırılabilir süreksizliğe

sahiptir.

$x > 1$ için $0 < \frac{2}{x^2+1} < 1$ olur ve $\lim_{x\to1^+}\left[\frac{2}{x^2+1}\right] = \lim_{x\to1^+} 0 = 0$

$0 < x < 1$ için $1 < \frac{2}{x^2+1} < 2$ olur ve $\lim_{x\to1^-}\left[\frac{2}{x^2+1}\right] = \lim_{x\to1^-} 1 = 1$ ve f, $a = 1$ de sıçrama tipi süreksizliğe sahiptir.

$x < -1$ için $0 < \frac{2}{x^2+1} < 1$ olur ve $\lim_{x\to-1^-}\left[\frac{2}{x^2+1}\right] = \lim_{x\to-1^-} 0 = 0$,

$-1 < x < 0$ için $1 < \frac{2}{x^2+1} < 2$ olur ve $\lim_{x\to-1^+}\left[\frac{2}{x^2+1}\right] = \lim_{x\to-1^+} 1 = 1$ ve f, $a = -1$ de sıçrama tipi süreksizliğe sahiptir.

5.a)$f(x) = x^3 + x$;

$f'(x) = \lim_{\Delta x\to0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x) - (x^3+x)$

$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + (x+\Delta x) - x^3 - x = \Delta x(3x^2 + 1 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)$ ve

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2 + 1 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$ ve

$f'(x) = \lim_{\Delta x\to0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to0}(3x^2 + 1 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2 + 1 + 0 + 0 = 3x^2 + 1$

b)$g(x) = 100x - 125$ fonksiyonunun $a = 3$ noktasında sürekli olduğunu $\epsilon - \delta$ kullanarak gösteriniz. $g(3) = 175$

Her $\varepsilon > 0$ için $|x-3| < \delta$ iken $|(100x-125) - 175| < \varepsilon$ o.ş. bir $\delta > 0$ bulmalıyız. δ

sayısı

$|(100x-125) - 175| = 100|x-3| < 100\delta = \varepsilon$ o.ş seçilirse istenen koşul sağlanır. yani $\delta = \frac{\varepsilon}{100}$ seçmek yeterli olacaktır.

$\delta > 0$ olur ve $|x-3| < \delta$ iken $|(100x-125) - 175| = 100|x-3| < 100\delta = \varepsilon$ olur.