MT 131 Analiz I Ara Sınav Çözümler

1. i) $\text{Gör}\,(f) = \{y \in \mathbb{R} : y = \dfrac{x^2+1}{x-3}$ olacak şekilde bir $x \in Tf$ vardır.$\}$

$= \{y \in \mathbb{R} : y = \dfrac{x^2+1}{x-3}$ olacak şekilde bir $x \neq 3$ vardır.$\}$

$= \{y \in \mathbb{R} : y(x-3) = x^2+1$ olacak şekilde bir $x \neq 3$ vardır.$\}$

($x = 3$ için $y(x-3) = x^2+1$ olacak şekilde bir y var olmadığı için)

$= \{y \in \mathbb{R} : x^2 - yx + (3y+1) = 0$ olacak şekilde bir x vardır.$\}$

$= \{y \in \mathbb{R} : \Delta = (-y)^2 - 4(3y+1) \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} : \Delta = y^2 - 12y - 4 \geq 0\}$

$= \{y \in \mathbb{R} : \Delta = (y-6)^2 \geq 40\} = (-\infty, 6-\sqrt{40}] \bigcup [6+\sqrt{40}, +\infty)$

ii) $\text{Gör}\,(f) = \{y \in \mathbb{R} : y = \dfrac{x^2+2}{x-5}$ olacak şekilde bir $x \in Tf$ vardır.$\}$

$= \{y \in \mathbb{R} : y = \dfrac{x^2+2}{x-5}$ olacak şekilde bir $x \neq 5$ vardır.$\}$

$= \{y \in \mathbb{R} : y(x-5) = x^2+2$ olacak şekilde bir $x \neq 5$ vardır.$\}$

($x = 5$ için $y(x-5) = x^2+2$ olacak şekilde bir y var olmadığı için)

$= \{y \in \mathbb{R} : x^2 - yx + (5y+2) = 0$ olacak şekilde bir x vardır.$\}$

$= \{y \in \mathbb{R} : \Delta = (-y)^2 - 4(5y+2) \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} : \Delta = y^2 - 20y - 8 \geq 0\}$

$= \{y \in \mathbb{R} : \Delta = (y-10)^2 \geq 108\} = (-\infty, 10-\sqrt{108}] \bigcup [10+\sqrt{108}, +\infty)$

ii) $\text{Gör}\,(f) = \{y \in \mathbb{R} : y = \dfrac{x^2+3}{x-6}$ olacak şekilde bir $x \in Tf$ vardır.$\}$

$= \{y \in \mathbb{R} : y = \dfrac{x^2+3}{x-6}$ olacak şekilde bir $x \neq 6$ vardır.$\}$

$= \{y \in \mathbb{R} : y(x-6) = x^2+3$ olacak şekilde bir $x \neq 6$ vardır.$\}$

($x = 6$ için $y(x-6) = x^2+3$ olacak şekilde bir y var olmadığı için)

$= \{y \in \mathbb{R} : x^2 - yx + (6y+3) = 0$ olacak şekilde bir x vardır.$\}$

$= \{y \in \mathbb{R} : \Delta = (-y)^2 - 4(6y+3) \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} : \Delta = y^2 - 24y - 12 \geq 0\}$

$= \{y \in \mathbb{R} : \Delta = (y-12)^2 \geq 156\} = (-\infty, 12-\sqrt{156}] \bigcup [12+\sqrt{156}, +\infty)$

2. i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x+3}-2}$ Bu limitte $\frac{0}{0}$ belirsizliği var.

$$\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x+3}-2}=\frac{(\sqrt[3]{x+7}-2)(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\frac{(x+7-8)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4)(x+3-4)}$$

$$=\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4)(x-1)}=\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4}\quad (x\neq 1 \text{ için })$$

Limitin Temel özelliğinden:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4}=\frac{2+2}{4+4+4}=\frac{1}{3}\text{ (Limit teoremlerinden)}$$

ii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt{x+2}-2}$ Bu limitte $\frac{0}{0}$ belirsizliği var.

$$\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt{x+2}-2}=\frac{(\sqrt[3]{x+6}-2)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$=\frac{(x+6-8)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)(x+2-4)}$$

$$=\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4)(x-2)}=\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}\quad (x\neq 2 \text{ için })$$

Limitin Temel özelliğinden:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}=\frac{2+2}{4+4+4}=\frac{1}{3}\text{ (Limit teoremlerinden)}$$

iii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x+5}-2}{\sqrt{x+1}-2}$ Bu limitte $\frac{0}{0}$ belirsizliği var.

$$\frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{\sqrt{x+1}-2}=\frac{(\sqrt[3]{x+5}-2)(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\frac{(x+5-8)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4)(x+1-4)}$$

$$=\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4)(x-3)}=\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4}\quad (x\neq 3 \text{ için })$$

Limitin Temel özelliğinden:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4}=\frac{2+2}{4+4+4}=\frac{1}{3}\text{ (Limit teoremlerinden)}$$

3. i) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)$ Bu limitte $\infty-\infty$ belirsizliği var.

$$\sqrt{4x^2+x}-2x=\frac{(\sqrt{4x^2+x}-2x)(\sqrt{4x^2+x}+2x)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\frac{(4x^2+x)-4x^2}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}$$
$$=\frac{x}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2x}\overset{*}{=}\frac{x}{x\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2x}\overset{*}{=}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2}$$

($*$: $x\to+\infty$ olduğu için $x>0$ kabul edebiliriz.)

Tek taraflı limitlerin temel özelliğinden:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x}-2x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}\text{ (Limit teoremlerinden)}$$

ii) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2+2x}-3x)$ Bu limitte $\infty-\infty$ belirsizliği var.

$$\sqrt{9x^2+2x}-3x=\frac{(\sqrt{9x^2+2x}-3x)(\sqrt{9x^2+2x}+3x)}{\sqrt{9x^2+2x}+3x}=\frac{(9x^2+2x)-9x^2}{\sqrt{9x^2+2x}+3x}=\frac{2x}{\sqrt{9x^2+2x}+3x}$$
$$=\frac{x}{|x|\sqrt{9+\frac{2}{x}}+3x}\overset{*}{=}\frac{2x}{x\sqrt{9+\frac{2}{x}}+3x}\overset{*}{=}\frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{x}}+3}$$

($*$: $x\to+\infty$ olduğu için $x>0$ kabul edebiliriz.)

Tek taraflı limitlerin temel özelliğinden:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2+2x}-3x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{x}}+3}=\frac{2}{3+3}=\frac{1}{3}\text{ (Limit teoremlerinden)}$$

iii) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{16x^2+5x}-4x)$ Bu limitte $\infty-\infty$ belirsizliği var.

$$\sqrt{16x^2+5x}-4x=\frac{(\sqrt{16x^2+5x}-4x)(\sqrt{16x^2+5x}+4x)}{\sqrt{16x^2+5x}+4x}=\frac{(16x^2+5x)-16x^2}{\sqrt{16x^2+5x}+4x}$$
$$=\frac{5x}{\sqrt{16x^2+5x}+4x}=\frac{5x}{|x|\sqrt{16+\frac{5}{x}}+4x}\overset{*}{=}\frac{5x}{x\sqrt{16+\frac{5}{x}}+4x}\overset{*}{=}\frac{5}{\sqrt{16+\frac{5}{x}}+4}$$

($*$: $x\to+\infty$ olduğu için $x>0$ kabul edebiliriz.)

Tek taraflı limitlerin temel özelliğinden:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{16x^2+5x}-4x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{16+\frac{5}{x}}+4}=\frac{5}{4+4}=\frac{5}{8}\text{ (Limit teoremlerinden)}$$

4. i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(\pi x)}{\sin(5x)}$ Bu limitte $\frac{0}{0}$ belirsizliği var.

$$\frac{\tan(\pi x)}{\sin(5x)} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\frac{5x}{\sin(5x)}\frac{\pi}{5\cos(\pi x)}$$

dir. $t = \pi x$ için $\lim_{x\to 0} t = \lim_{x\to 0} \pi x = 0$ ve $x \neq 0$ için $t = \pi x \neq 0$ ve $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ olduğundan, Limitler için Değişken Değiştirme Teoreminden, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1$ olur.
Ayrıca, $\lim_{x\to 0} \cos t = 1$ olduğundan, aynı teoremden, $\lim_{x\to 0} \cos(\pi x) = 1$ olur.
$t = 5x$ için $\lim_{x\to 0} t = \lim_{x\to 0} 5x = 0$ ve $x \neq 0$ için $t = 5x \neq 0$ ve $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ olduğundan, Limitler için değişken Değiştirme Teoreminden, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{5x} = 1$ olur. Limit Teoreminden, $\lim_{x\to 0} \dfrac{5x}{\sin(5x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\frac{\sin(5x)}{5x}} = \frac{1}{1} = 1$ olur. Limit Teoreminden ve Sabitin Limiti Teoreminden,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\pi x)}{\sin(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\frac{5x}{\sin(5x)}\frac{\pi}{5\cos(\pi x)} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{5\cdot 1} = \frac{\pi}{5} \quad \text{bulunur.}$$

ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{\tan(3x)}$ Bu limitte $\frac{0}{0}$ belirsizliği var.

$$\frac{\sin(\pi x)}{\tan(3x)} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\frac{3x}{\sin(3x)}\frac{\pi\cos(3x)}{3}$$

dir. $t = \pi x$ için $\lim_{x\to 0} t = \lim_{x\to 0} \pi x = 0$ ve $x \neq 0$ için $t = \pi x \neq 0$ ve $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ olduğundan, Limitler için Değişken Değiştirme Teoreminden, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1$ olur.
$t = 3x$ için $\lim_{x\to 0} t = \lim_{x\to 0} 3x = 0$ ve $x \neq 0$ için $t = 3x \neq 0$ ve $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ olduğundan, Limitler için değişken Değiştirme Teoreminden, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{3x} = 1$ olur.
Ayrıca, $\lim_{x\to 0} \cos t = 1$ olduğundan, aynı teoremden, $\lim_{x\to 0} \cos(3x) = 1$ olur. Limit Teoreminden, $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\frac{\sin(3x)}{3x}} = \frac{1}{1} = 1$ olur. Limit Teoreminden ve Sabitin Limiti Teoreminden,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{\tan(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\frac{3x}{\sin(3x)}\frac{\pi\cos(3x)}{3} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi \cdot 1}{3} = \frac{\pi}{3} \quad \text{bulunur.}$$

5. i) $f(x) = \sin x + \cos x - x^2,\ \lambda = -1$ olsun.
$f(0) = 1 > \lambda, \quad f(2) = \sin 2 + \cos 2 - 4 \leq 2 - 4 = -2 < -1$ dir ve $f,\ [0,2]$ aralığında süreklidir (çünki $[0,2] \subset Tf = \mathbb{R}$ ve f, teoremlerden, sürekli fonksiyondur).
Ara Değer Teoreminden, $f(c) = \lambda = -1$ olacak şekilde en az bir $c \in [0,2]$ sayısı vardır.
Bu sayı için (f nin tanımı ve λ nın seçiminden) $\sin c + \cos c = c^2 - 1$ olur.

ii) $f(x) = \sin x - \cos x - x^2,\ \lambda = -2$ olsun.
$f(0) = -1 > \lambda, \quad f(2) = \sin 3 - \cos 3 - 9 \leq 2 - 9 = -7 < -2$ dir ve $f,\ [0,3]$ aralığında süreklidir (çünki $[0,3] \subset Tf = \mathbb{R}$ ve f, teoremlerden, sürekli fonksiyondur).
Ara Değer Teoreminden, $f(c) = \lambda = -2$ olacak şekilde en az bir $c \in [0,3]$ sayısı vardır.
Bu sayı için (f nin tanımı ve λ nın seçiminden) $\sin c - \cos c = c^2 - 2$ olur.

6. i) $f(x) = \dfrac{\lfloor 2\cos x \rfloor}{\sin x}$

a) $a = 0$ alalım. $0 < x < \frac{\pi}{3}$ için $1 < 2\cos x < 2$ ve bu nedenle, $\lfloor 2\cos x \rfloor = 1$ olur. Sağdan limitlerin temel özelliğinden,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\lfloor 2\cos x \rfloor}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} \text{ olur.}$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{1} = 0$ ve $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında $\frac{1}{\sin x} > 0$ olduğu için, $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}^-} \frac{\lfloor 2\cos x \rfloor}{\sin x} = +\infty$ olup, f, 0 da sonsuz tip süreksizliğe sahiptir.

b) $a = \frac{\pi}{3}$ alalım. $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ için $0 < 2\cos x < 1$ ve bu nedenle $\lfloor 2\cos x \rfloor = 0$ olur. Sağdan limitlerin temel özelliğinden,

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}^+} \frac{\lfloor 2\cos x \rfloor}{\sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{3}^+} \frac{0}{\sin x} = 0 \text{ olur.}$$

$0 < x < \frac{\pi}{3}$ için $1 < 2\cos x < 2$ ve bu nedenle, $\lfloor 2\cos x \rfloor = 1$ olur. Soldan limitlerin temel özelliğinden,

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}^-} \frac{\lfloor 2\cos x \rfloor}{\sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{3}^-} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ olur.}$$

$0, \frac{2}{\sqrt{3}} \in \mathbb{R}$ ve $\frac{2}{\sqrt{3}} \neq 0$ olduğu için, f, $\frac{\pi}{3}$ de sıçrama tipi süreksizliğe sahiptir.

ii) $f(x) = \dfrac{\lfloor 2\sin x \rfloor}{\cos x}$

a) $a = 0$ alalım. $0 < x < \frac{\pi}{6}$ için $0 < 2\sin x < 1$ ve bu nedenle $\lfloor 2\sin x \rfloor = 0$ olur. Sağdan limitlerin temel özelliğinden,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\lfloor 2\sin x \rfloor}{\cos x} = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0 \text{ olur.}$$

$-\frac{\pi}{6} < x < 0$ için $-1 < 2\sin x < 0$ ve bu nedenle $\lfloor 2\sin x \rfloor = -1$ olur. Soldan limitlerin temel özelliğinden,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\lfloor 2\sin x \rfloor}{\cos x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{\cos x} = \frac{-1}{1} = -1 \text{ olur.}$$

$0, -1 \in \mathbb{R}$ ve $-1 \neq 0$ olduğu için, f, 0 de sıçrama tipi süreksizliğe sahiptir.

b) $a = \frac{\pi}{2}$ alalım. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ için $1 < 2\sin x < 2$ ve bu nedenle $\lfloor 2\sin x \rfloor = 1$ olur. Soldan limitlerin temel özelliğinden,

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\lfloor 2\sin x \rfloor}{\cos x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x} \text{ olur.}$$

$\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{1} = 0$ ve $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında $\frac{1}{\cos x} > 0$ olduğu için, $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\lfloor 2\sin x \rfloor}{\cos x} = +\infty$ olup, f, $\frac{\pi}{2}$ de sonsuz tip süreksizliğe sahiptir.