MT 131 Analiz I Ara Sınav (2019) Çözüm

1. $T(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + x \geq 0,\ \sqrt[3]{x+7} - 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x(x^2+1) \geq 0,\ \sqrt[3]{x+7} \neq 2\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0,\ x \neq 1\} = [0,1) \cup (1, +\infty)$

2. $$\frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2} = \frac{(\sqrt[3]{x-1}-1)(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1)}$$
$$= \frac{(x-1-1)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2-4)(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1)} \overset{*}{=} \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1} \quad (*: x \neq 2)$$
Limitin Temel Özelliğinden,
$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}+1} \overset{*}{=} \frac{4}{3} \quad \text{(*: Limit Teoremleri)}$$

3. $$\sqrt[3]{x^3+x^2-1} - x = \frac{(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x)(\sqrt[3]{(x^3+x^2-1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+x^2)}{\sqrt[3]{(x^3+x^2-1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+x^2}$$
$$= \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2-1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2-1}+x^2} = \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2\left(\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}+1\right)}$$
$$= \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}+1} \quad (\text{her } x \neq 0 \text{ için})$$
Bu nedenle:
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}+1} \overset{*}{=} \frac{1}{3} \quad \text{*: Limit Teoremleri}$$

4. Her $x \in \mathbb{R}$ için $3x < \lfloor 3x+1 \rfloor \leq 3x+1$ ve $x < -\frac{3}{2}$ için $3x+1 < 0,\ 2x+3 < 0$ oluşundan
$$\text{Her } x < -\frac{3}{2} \text{ için,} \quad \frac{2x+3}{3x} \leq \frac{2x+3}{\lfloor 3x+1 \rfloor} \leq \frac{2x+3}{3x+1} \quad \text{olur.}$$
Limit Teoremlerinden, $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{3} = \frac{2}{3}$ ve $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{3x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{3+\frac{1}{x}} = \frac{2}{3}$ dir.
Sıkıştırma teoreminden, $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{\lfloor 3x+1 \rfloor} = \frac{2}{3}$ elde edilir.

5. $\frac{1+\cos x}{(x^2-\pi^2)\sin x} = \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(x^2-\pi^2)\sin x(1-\cos x)} = \frac{\sin x}{x-\pi} \cdot \frac{1}{(x+\pi)(1-\cos x)}$ dir.
$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$ limitini bulmak için, $t = x - \pi$ değişken değişikliği yapacağız.
a) $\lim_{x\to\pi}(x-\pi) = 0$ b) $x \neq \pi$ için, $x - \pi \neq 0$ olur. c) $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ (Teorem)
ve $\frac{\sin x}{(x-\pi)} = -\frac{\sin(x-\pi)}{(x-\pi)}$ olduğundan, Limit için Değişken Değiştirme Teoreminden,
$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{(x-\pi)} = -1$ olur. Buradan da,
$$\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{(x^2-\pi^2)\sin x} = \lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin x}{x-\pi} \cdot \frac{1}{(x+\pi)(1-\cos x)}\right) = (-1) \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 2} = \frac{-1}{4\pi} \text{ elde edilir.}$$

6. $f(x) = \cos x - \sqrt{x}$ olsun. (Teoremlerden) f sürekli bir fonksiyondur ve $T(f) = [0, +\infty)$ dir. $[0, 4] \subset T(f)$ olduğundan, f, $[0, 4]$ aralığında süreklidir. $\lambda = 0$ için, $f(0) = 1 > \lambda$ ve $\lambda > \cos 4 - 2 = f(4)$ dir. Ara Değer Teoreminden, $f(c) = \lambda = 0$ olacak şekilde (en az) bir $0 < c < 4$ sayısı vardır. Bu sayı için $\cos c = \sqrt{c}$ dir.

7. f bir fonksiyon, $a \in T(f)$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ (gerçel sayısı) için,
$|x - a| < \delta$ (ve $x \in T(f)$) iken $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$
olacak şekilde (en az bir) $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa,
f, a da süreklidir deriz.
Bir $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$|\sqrt{x} - \sqrt{1}| = |\sqrt{x} - 1| = \left| \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1} \right| \leq |x - 1| \overset{*}{<} \delta \overset{**}{=} \varepsilon \quad (* : |x - 1| < \delta \text{ iken, } **\text{: } \overset{\text{yapacağımız}}{\text{seçimden}})$$

Yukarıdaki satırda görüldüğü gibi, $\delta = \varepsilon$ sayısı istenen özelliğe sahiptir.

8. a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos x = \cos \dfrac{\pi}{2} = 0$ ve $\frac{\pi}{2} < x < 2$ için $\frac{1}{\cos x} < 0$ olduğundan, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{1}{\cos x} = -\infty$ olur. Her $\frac{\pi}{2} < x < 2$ için $\lfloor x \rfloor = 1$ olduğu için $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{\cos x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{1}{\cos x} = -\infty$ olur.
f, $\frac{\pi}{2}$ de sonsuz tipi süreksizliğe sahiptir.
b) $0 < x < 1$ için $\lfloor x \rfloor = 0$ olduğu için $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{\cos x} \overset{*}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} 0 = 0$ olur.
(*: Sağdan Limitlerin Temel Özelliği)
$-1 < x < 0$ için $\lfloor x \rfloor = -1$ olduğu için $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{\cos x} \overset{*}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-1}{\cos x} = -1$ olur.
(*: Soldan Limitlerin Temel Özelliği)
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ ve $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ farklı SAYILAR olduğu için, f, 0 da sıçrama süreksizliğe sahiptir.

9. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \overset{*}{=} \lim\limits_{x \to 1^+} x + 1 = 2$ (*: Sağdan Limitlerin Temel Özelliği)
$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x - 1 - 1}{x - 1} \overset{*}{=} \lim\limits_{x \to 1^+} 2 = 2$ (*: Soldan Limitlerin Temel Özelliği)
olduğundan, (Tek/Çift Taraflı Limit İlişkisi Teoreminden) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$ olur.
Bu da, f nin 1 de türevlenebilir ve $f'(1) = 2$ olması demekdir.

10. Kapalı Türev alma yöntemi ile:

$$5x^4 y + x^5 \frac{dy}{dx} + \cos(x - y) \left(1 - \frac{dy}{dx} \right) = 0 \quad \text{den} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-5x^4 y - \cos(x - y)}{x^5 - \cos(x - y)} \text{ bulunur.}$$