MT 131 ANALİZ I 2020-21 Final Sınavı Çözümleri

1. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$ limitinde $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var.
L'Hospital in kuralı için diğer koşullar (pay ve paydanın türevlenebilmesi ve paydanın türevini 0 olmaması) da sağlanıyor. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=\frac{+\infty}{1}=+\infty$ olur. L'Hospital in Kuralından, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ olur.
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{0}{-\infty}=0$ olur. $y=0$ doğrusu (x-ekseni) biricik yatay asimptottur.
$\lim\limits_{x\to0^+}x\frac{e^x}{=}\frac{0}{1}=0$ ve her $x>0$ için $\frac{e^x}{x}>0$ olduğu için, bizim tanımımıza göre,
$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x}{x}=+\infty$ olur. Bu nedenle f, 0 da bir düşey asimptota sahiptir. Diğer noktalarda sürekli olduğu için başka düşey asimptota sahip olamaz.
$f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$ olup, $x=1$ biricik kritik noktadır (fonksiyon 0 da tanımsızdır.).

x		0		1	
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	|	$+$
(f) Artan-azalan	↘	‖	↘	|	↗

f, 1 de sürekli olduğu için, 1. Türev testinden, $x=1$ de bir yerel minimuma sahiptir. Başka yerel ekstremum yoktur.
$f''(x)=\frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$ olup 0 dışında tanımlı ve süreklidir, hiç bir zaman 0 değerine ulaşmaz. Bu nedenle, büküm noktası olamaz ($f''(x)$ sürekli fonksiyon olduğu için, Ara Değer Teoreminden, sadece 0 değerini aldığında veya tanımsız olduğunda işaret değiştirebilir. $f''(x)$, 0 da işaret değiştirir ama, orada f tanımsız olduğu için büküm noktası var olamaz.)

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}$ limitinde $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var.
L'Hospital in kuralı için diğer koşullar (pay ve paydanın türevlenebilmesi ve paydanın türevini 0 olmaması) da sağlanıyor. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ olur. L'Hospital in Kuralından, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$ olur. Fonksiyon $-\infty$ "yakınında" tanımlı değildir. Yatay asimtot yoktur
$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x}=\frac{0}{1}=0$ ve her $x>1$ için $\frac{x}{\ln x}>0$ olduğu için, bizim tanımımıza göre,
$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x}{\ln x}=+\infty$ olur. Bu nedenle f, 1 da bir düşey asimptota sahiptir.
$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\ln x}=\frac{0}{-\infty}=0$ olur.
Diğer noktalarda ($x>0$, $x\neq1$ için sürekli, $x<0$ için tek taraflı limit ön koşulu sağlanmadığı için) başka düşey asimptota sahip olamaz.
$f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$ olup $x=e$ biricik kritik sayıdır.

x	0		1		e	
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	|	$+$
(f) Artan-azalan	‖	↘	‖	↘	|	↗

f, e de sürekli olduğu için, 1. Türev testinden, e de bir yerel minimuma sahiptir. Başka yerel ekstremum yoktur.

$f''(x) = \frac{2-\ln x}{\ln^3 x}$ Büküm noktası adayı: $x = e^2$

x	0		1		e^2	
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$-$
(f) Bükeylik	$\Vert$	$\frown$	$\Vert$	$\smile$	$\vert$	$\frown$

f, e^2 de türevlenebildiği için teğete sahiptir, e^2 de bir büküm noktasına sahiptir.

(c) (Bizim kullandığımız tanıma göre) $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{t\to+\infty} \frac{-\ln t}{t^2}$ olur ve bu limitte $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. L'Hospital in kuralı için diğer koşullar (pay ve paydanın türevlenebilmesi ve paydanın türevini 0 olmaması) da sağlanıyor. $\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{-1}{t}}{2t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-1}{2t^2} = \frac{-1}{+\infty} = 0.$ L'Hospital in kuralı için diğer koşullar (pay ve paydanın türevlenebilmesi ve paydanın türevini 0 olmaması) da sağlanıyor. L'Hospital Kuralından, $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t^2} = 0$ olur. 0 da düşey asimptot yoktur. Pozitif sayılarda fonksiyon süreklidir, negatif sayılarda tek taraflı limit ön koşulu sağlanmaz, düşey asimtot yoktur. $\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln x = (+\infty)(+\infty) = +\infty$ olduğunda yatay asimptot yoktur. ($-\infty$ de limit ön koşulu sağlanmaz) $x > 0$ için $f'(x) = x(1+2\ln x)$ olduğundan, biricik kritik sayı:$e^{-1/2}$ dır.

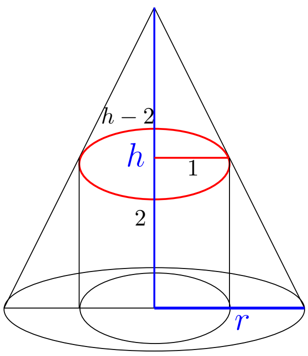
x	0		$e^{-1/2}$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$+$
(f) Artan-azalan	$\Vert$	$\searrow$	$\vert$	$\nearrow$

f, $e^{-1/2}$ de sürekli olduğundan, 1. Türev testinden, $e^{-1/2}$ de yerel minimum vardır.
$x > 0$ için $f''(x) = 3 + 2\ln x$ olduğundan, biricik büküm noktası adayı: $e^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$ dır.

x	0		$e^{-3/2}$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$+$
Bükeylik	$\Vert$	$\frown$	$\vert$	$\smile$

f, $e^{-3/2}$ de türevlenebildiğinden, teğeti vardır. f, $e^{-3/2}$ de bir büküm noktasına sahiptir.

2. (a)

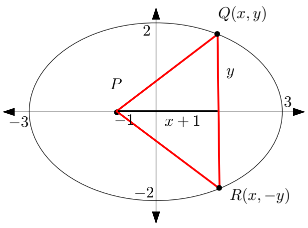


Koninin taban yarıçapı r, yüksekliği h olsun.
Koninin hacmi minimum yapılacak.
Koninin hacmi $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$
Benzer üçgenlerden: $\frac{h}{h-2} = \frac{r}{1}$
$V = \frac{\pi}{3} \frac{h^3}{(h-2)^2}$ minimum yapılacak.
$h > 2$ olmak zorunda.
$f(h) = \frac{\pi}{3} \frac{h^3}{(h-2)^2}$, $(2, +\infty)$ aralığında minimum yapılacak.
$f'(h) = \frac{\pi(h^3 - 6h^2)}{3(h-2)^3}$ Kritik sayılar: $h = 0, 6$ sadece $6 \in (2, +\infty)$

x	2		6	
$f'(x)$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$
(f) Artan-azalan	$\vert$	$\searrow$	$\vert$	$\nearrow$

f, 6 da sürekli olduğu için, 1. türev testinden, 6 da, $(2, +\infty)$ aralığındaki minimum değerine erişir. $r = \frac{3}{2}$ bulunur.

(b)

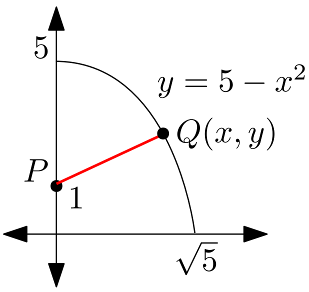


Üçgenin sağ üst köşesi $Q(x,y)$ olsun. Koninin taban yarıçapı $r=y$, yüksekliği $h=x+1$ olur.
Koninin hacmi maksimum yapılacak.
Koninin hacmi $V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}y^2(x+1)$
Q noktası elips üzerinde olduğu için: $y^2=\frac{36-4x^2}{9}$
$V=\frac{4\pi}{27}(9-x^2)(x+1)=\frac{4\pi}{27}(9+9x-x^2-x^3)$ maksimum yapılacak.
$-1<x<3$ olmak zorunda.
(Q köşesinin P nin solunda $(x<-1)$ olma durumun hiç gözönüne almadık. Siz, niçin o durumda, koninin hacminin en büyük olamayacağını bulmaya çalışın. Benzer mantık ile, hiç bir hesap yapmadan en büyük koninin $x\geq 0$ için oluşacağı da görülebilir.)
$f(x)=\frac{4\pi}{27}(9+9x-x^2-x^3)$, $(-1,3)$ aralığında maksimum yapılacak.
$f'(x)=\frac{4\pi}{27}(9-2x-3x^2)$ Kritik sayılar: $x=\frac{-1\pm2\sqrt{7}}{3}$
$(2<\sqrt{7}<3$ olduğu için) sadece $\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}\in(-1,3)$

x	-1		$\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}$		3
$f'(x)$	|	$+$	|	$-$	
(f) Artan-azalan	|	$\nearrow$	|	$\searrow$	

f, $\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}$ da sürekli olduğu için, 1. türev testinden, $\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}$ da, $(-1,3)$ aralığındaki maksimum değerine erişir.
$x=\frac{-1+2\sqrt{7}}{3}$ için $y=\frac{\sqrt{208+16\sqrt{7}}}{9}$ bulunur.
Üçgenin diğer köşeleri: $Q(\frac{-1+2\sqrt{7}}{3},\frac{\sqrt{208+16\sqrt{7}}}{9})$, $R(\frac{-1+2\sqrt{7}}{3},-\frac{\sqrt{208+16\sqrt{7}}}{9})$ olur.

(c)



Parabolün üzerindeki bir nokta $Q(x,y)$ olsun.
$|PQ|$ uzunluğu minimum yapılacak.
$|PQ|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$
Q noktası elips üzerinde olduğu için: $y=5-x^2$
$|PQ|=\sqrt{x^4-7x^2+16}$ minimum yapılacak.
$0\leq x\leq\sqrt{5}$ olacağı soruda belirtilmiş.
$f(x)=\sqrt{x^4-7x^2+16}$, $[0,\sqrt{5}]$ aralığında minimum yapılacak.
$[0,\sqrt{5}]$ aralığı kapalı ve sınırlı ve $f(x)$ bu aralıkda sürekli olduğu için, Maksimum-minimum Teoreminden, bu aralıkta maksimum ve minimum değerlerine ya uç noktalarda ya da içte bir kritik sayıda erişir.
$f'(x)=\frac{2x^3-7x}{\sqrt{x^4-7x^2+16}}=\frac{x(2x^2-7)}{\sqrt{x^4-7x^2+16}}$ Kritik sayılar: $x=0,\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ bulunur.
Bu aralıkta, iç noktalardaki, kritik sayı: $\sqrt{\frac{7}{2}}$.
$f(0)=4$, $f(\sqrt{5})=\sqrt{6}$, $f(\sqrt{\frac{7}{2}})=\frac{\sqrt{15}}{2}$
$\frac{\sqrt{15}}{2}<\sqrt{6}<4$ olduğu için, ($x=\sqrt{\frac{7}{2}}$ için $y=\frac{3}{2}$ olur) $Q(\frac{\sqrt{15}}{2},\frac{3}{2})$ noktası, bu parabolün I. çeyrekteki parçası üzerinde, $P(0,1)$ e en yakın noktasıdır.

3. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x-\operatorname{Arcsin}x}{\sin x-\operatorname{Arctan}x}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği var. L'Hospital in kuralı için diğer koşullar (pay ve paydanın türevlenebilmesi ve paydanın türevini 0 olmaması) da sağlanıyor.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cosh x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x-\frac{1}{1+x^2}}$ limitinde de $\frac{0}{0}$ belirsizliği var. L'Hospital in kuralı için diğer koşullar (pay ve paydanın türevlenebilmesi ve paydanın türevini 0 olmaması) da sağlanıyor.

$$\frac{\sinh x-\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{-\sin x+\frac{x}{(1+x^2)^2}}=\frac{\frac{\sinh x}{x}-\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{-\sin x}{x}+\frac{2}{(1+x^2)^2}}$$

ve $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=\sinh' 0=\cosh 0=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ oluşundan, Limit Teoreminden,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sinh x}{x}-\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{(1+x^2)^2}}=\frac{1-1}{-1+2}=0$ bulunur.

(2 kez) L'Hospital in kuralından, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x-\operatorname{Arcsin}x}{\sin x-\operatorname{Arctan}x}=0$ olur.

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x\operatorname{Arcsin}x}{1-\cos x}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği var. L'Hospital in kuralı için diğer koşullar (pay ve paydanın türevlenebilmesi ve paydanın türevini 0 olmaması) da sağlanıyor.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cosh x\operatorname{Arcsin}x+\sinh x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin x}$ limitinde de $\frac{0}{0}$ belirsizliği var.

$$\frac{\cosh x\operatorname{Arcsin}x+\sinh x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin x}=\frac{\cosh x\frac{\operatorname{Arcsin}x}{x}+\frac{\sinh x}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{\sin x}{x}}$$

ve $\lim\limits_{x\to 0}\cosh x=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arcsin}x}{x}=\operatorname{Arcsin}' 0=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}=\cosh 0=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ olduğundan,

Limit Teoreminden,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cosh x\operatorname{Arcsin}x+\sinh x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cosh x\frac{\operatorname{Arcsin}x}{x}+\frac{\sinh x}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1\cdot 1+1\cdot 1}{1}=2$ olur.

(2 kez) L'Hospital in kuralından,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x\operatorname{Arcsin}x}{1-\cos x}=2\quad\text{olur}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sinh^2 x}}$ limitinde 1^∞ belirsizliği var.

$\ln\left((\cos x)^{\frac{1}{\sinh^2 x}}\right)=\dfrac{\ln(\cos x)}{\sinh^2 x}$ olur.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\sinh^2 x}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği var. L'Hospital in kuralı için diğer koşullar (pay ve paydanın türevlenebilmesi ve paydanın türevini 0 olmaması) da sağlanıyor.

$$\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2\sinh x\cosh x}=\frac{-\frac{\sin x}{x}}{2\frac{\sinh x}{x}\cosh x\cos x}\quad\text{olur.}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = \cosh 0 = 1,\ \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1,\ \lim\limits_{x\to 0} \cosh x = 1$ olduğundan,

Limit Teoreminden, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{\sin x}{x}}{2\frac{\sinh x}{x}\cosh x \cos x} = -\frac{1}{2}$ olur.

L'Hospital in Kuralından, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{2}$ olur.

$(\cos x)^{\frac{1}{\sinh^2 x}} = \exp\left(\dfrac{\ln(\cos x)}{\sinh^2 x}\right)$ ve exp fonksiyonu $\frac{-1}{2}$ de sürekli olduğundan, Bileşkenin Limiti Teoreminden,

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sinh^2 x}} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\ln(\cos x)}{\sinh^2 x}\right) = \exp(-\tfrac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \text{olur.}$$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\sinh^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ limitinde 1^∞ belirsizliği var.

$\ln\left(\left(1+\sinh^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\sinh^2 x\right)}{\sin^2 x}$ olur.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+\sinh^2 x\right)}{\sin^2 x}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği var. L'Hospital in kuralı için diğer koşullar (pay ve paydanın türevlenebilmesi ve paydanın türevini 0 olmaması) da sağlanıyor.

$$\frac{\frac{2\sinh x\cosh x}{1+\sinh^2 x}}{2\sin x\cos x} = \frac{\frac{\sinh x}{x}\cosh x}{\frac{\sin x}{x}\cos x} \quad \text{olur.}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = \cosh 0 = 1,\ \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1,\ \lim\limits_{x\to 0} \cosh x = 1$ olduğundan,

Limit Teoreminden, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2\sinh x\cosh x}{1+\sinh^2 x}}{2\sin x\cos x} = 1$ olur.

L'Hospital in Kuralından, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+\sinh^2 x\right)}{\sin^2 x} = 1$ olur.

$\left(1+\sinh^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \exp\left(\dfrac{\ln\left(1+\sinh^2 x\right)}{\sin^2 x}\right)$ ve exp fonksiyonu 1 de sürekli olduğundan, Bileşkenin Limiti Teoreminden,

$$\lim_{x\to 0} \left(1+\sinh^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\ln\left(1+\sinh^2 x\right)}{\sin^2 x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+\sinh^2 x\right)}{\sin^2 x}\right) = \exp(1) = e$$

olur.

4. (a) $f(x)=\sqrt{x},\ b=\frac{3}{4},\ a=1$ alalım.
f, bu iki sayıyı da içine alan $(0,+\infty)$ aralığında sonsuz kez türevlenebilirdir.
$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\ f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},\ f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$ olur.
$f(a)=1,\ f'(a)=\frac{1}{2},\ f''(a)=-\frac{1}{4},\ f'''(a)=\frac{3}{8}$ olur.
$P_3(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3$ olur. Kalanlı Taylor Teoreminden,
$\sqrt{\frac{3}{4}}=f(b)=P_3(\frac{3}{4})+R_3$ olur.
$\sqrt{\frac{3}{4}}\approx P_3\left(\frac{3}{4}\right)=1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^7}-\frac{1}{2^{10}}$ olur.
Kalanlı Taylor Teoreminden,
Hata$=|R_3|=\left|\dfrac{f''''(c)}{4!}(b-a)^4\right|=\dfrac{|f''''(c)|}{2^8\,4!}$ olacak şekilde bir $c\in(\frac{3}{4},1)$ sayısı vardır.
$f''''(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$ olduğundan,
$f''''(c)=-\frac{15}{16c^{\frac{7}{2}}}$ olup, $\frac{3}{4}<c<1$ olduğu için (basitçe) $c^{\frac{7}{2}}>\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{7}{2}}>\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{7}{2}}=\frac{1}{2^7}$ ve bunun sonucu olarak,
$\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 1-\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^7}-\frac{1}{2^{10}}$ yaklaşık eşitliğinde, Hata$<\frac{5}{2^8}$ olur.
(Aslında, $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{7}{2}}>\frac{1}{3}$ olduğu için, Hata$<\frac{15}{2^{15}}$ dir.)
$n=4$ için, Hata$|R_4|=\left|\dfrac{f^{(5)}(c)}{5!}(b-a)^5\right|=\dfrac{\left|f^{(5)}(c)\right|}{2^{10}5!}$ olacak şekilde bir $\frac{3}{4}<c<1$ sayısı var olurdu.
$f^{(5)}(x)=\frac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}},\ f^{(5)}(c)=\frac{105}{2^5c^{\frac{9}{2}}}$,
$\frac{3}{4}<c<1$ olduğu için $c^{\frac{9}{2}}>\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{9}{2}}>\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{9}{2}}=\frac{1}{2^9}$ ve
$\sqrt{\frac{3}{4}}\approx P_4(\frac{3}{4})$ yaklaşık eşitliğinde, Hata$<\dfrac{105\cdot 2^9}{2^5 2^{10}5!}=\dfrac{7}{2^9}$ olurdu.
(Aslında, $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{9}{2}}>\frac{1}{4}$ olduğu için, Hata$<\dfrac{7}{2^{16}}$ dır.)

(b) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ b=\frac{4}{3},\ a=1$ alalım.
f, bu iki sayıyı da içine alan $(0,+\infty)$ aralığında sonsuz kez türevlenebilirdir.
$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\ f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ olur.
$f(a)=1,\ f'(a)=\frac{1}{3},\ f''(a)=-\frac{1}{9}$ olur.
$P_2(x)=1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{9}(x-1)^2$ olur. Kalanlı Taylor Teoreminden,
$\sqrt[3]{\frac{4}{3}}=f(b)=P_2(\frac{4}{3})+R_2$ olur.
$\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\approx P_2\left(\frac{4}{3}\right)=1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^4}$ olur.
Kalanlı Taylor Teoreminden,
Hata$=|R_2|=\left|\dfrac{f'''(c)}{3!}(b-a)^3\right|=\dfrac{|f'''(c)|}{2\cdot 3^4}$ olacak şekilde bir $c\in(1,\frac{4}{3})$ sayısı vardır.
$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$ olduğundan,
$f'''(c)=\frac{10}{3^3c^{\frac{8}{3}}}$ olup, $\frac{4}{3}>c>1$ olduğu için $c^{\frac{8}{3}}>1$ ve bunun sonucu olarak,
$\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\approx 1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^4}$ yaklaşık eşitliğinde, Hata$<\frac{5}{3^7}$ olur.
$n=3$ için, Hata$=|R_3|=\left|\dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}(b-a)^4\right|=\dfrac{\left|f^{(4)}(c)\right|}{8\cdot 3^5}$ olacak şekilde bir $\frac{4}{3}>c>1$ sayısı var olurdu.

$f^{(4)}(x) = -\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}},\ f^{(4)}(c) = -\frac{80}{3^4 c^{\frac{11}{3}}},\ \left|f^{(4)}(c)\right| = \frac{80}{3^4 c^{\frac{11}{3}}},$
$\frac{4}{3} > c > 1$ olduğu için $c^{\frac{11}{3}} > 1$ ve
$\sqrt[3]{\frac{4}{3}} \approx P_3(\frac{4}{3})$ yaklaşık eşitliğinde, Hata$< \dfrac{80}{8 \cdot 3^9} = \dfrac{10}{3^9}$ olurdu.

(c) $f(x) = \sqrt[4]{x},\ b = \frac{5}{4},\ a = 1$ alalım.
f, bu iki sayıyı da içine alan $(0, +\infty)$ aralığında sonsuz kez türevlenebilirdir.
$f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}},\ f''(x) = -\frac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}}$ olur.
$f(a) = 1,\ f'(a) = \frac{1}{4},\ f''(a) = -\frac{3}{16}$ olur.
$P_2(x) = 1 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{32}(x-1)^2$ olur. Kalanlı Taylor Teoreminden,
$\sqrt[4]{\frac{5}{4}} = f(b) = P_2(\frac{5}{4}) + R_2$ olur.
$\sqrt[4]{\frac{5}{4}} \approx P_2\left(\frac{5}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2^4} - \frac{3}{2^9}$ olur.
Kalanlı Taylor Teoreminden,
Hata$= |R_2| = \left|\dfrac{f'''(c)}{3!}(b-a)^3\right| = \dfrac{|f'''(c)|}{3 \cdot 2^7}$ olacak şekilde bir $c \in (1, \frac{5}{4})$ sayısı vardır.
$f'''(x) = \frac{21}{64}x^{-\frac{11}{4}}$ olduğundan,
$f'''(c) = \frac{21}{2^6 c^{\frac{11}{4}}}$ olup, $\frac{5}{4} > c > 1$ olduğu için $c^{\frac{11}{4}} > 1$ ve bunun sonucu olarak,
$\sqrt[4]{\frac{5}{4}} \approx 1 + \frac{1}{2^4} - \frac{3}{2^9}$ yaklaşık eşitliğinde, Hata$< \frac{7}{2^{13}}$ olur.
$n = 3$ için, Hata$= |R_3| = \left|\dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}(b-a)^4\right| = \dfrac{\left|f^{(4)}(c)\right|}{3 \cdot 2^{11}}$
olacak şekilde bir $\frac{4}{3} > c > 1$ sayısı var olurdu.
$f^{(4)}(x) = -\frac{21}{4^4}x^{-\frac{15}{4}},\ f^{(4)}(c) = -\frac{21}{2^8 c^{\frac{15}{4}}},\ \left|f^{(4)}(c)\right| = \frac{21}{2^8 c^{\frac{15}{4}}},$
$\frac{4}{3} > c > 1$ olduğu için $c^{\frac{15}{4}} > 1$ ve
$\sqrt[4]{\frac{5}{4}} \approx P_3(\frac{5}{4})$ yaklaşık eşitliğinde, Hata$< \dfrac{21}{3 \cdot 2^8 \cdot 2^{11}} = \dfrac{7}{2^{19}}$ olurdu.