MT 131 ANALİZ I

FİNAL SINAVI ÇÖZÜMLER

1. (a) $f(x)=x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{1}{3}},\ f'(x)=\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}(2x+1)=0$ Kritik sayılar: $x=0$ ve $x=-\frac{1}{2}$

$f''(x)=\dfrac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}-\dfrac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}=\dfrac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}(x-1)=0$ Büküm noktası adayları: $x=0$ ve $x=1$

		$-\frac{1}{2}$		0		1	
f'	$-$	|	$+$	||		$+$	
Grafik	$\searrow$	|	$\nearrow$	||		$\nearrow$	
f''		$+$		||	$-$	|	$+$
Grafik		$\smile$		||	$\frown$	|	$\smile$

$-\frac{1}{2}$ de yerel minimum var.

0 da yerel ekstremum yok.

0 ve 1 de büküm noktası var.

(0 da düşey teğetin varlığına dikkat edin)

(b) $f(x)=x^5+x^3+2=0$ için $x=-1$ bulunur. $f'(x)=5x^4+3x^2$ ve $g'(0)=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{8}$ olur.

2. (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arcsin}x-\operatorname{Arctan}x}{x\sin^2 x}$ de $\frac{0}{0}$ belirsizliği var. L'Hospital in Kuralını deneyelim.

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+x^2}}{\sin^2 x+2x\sin x\cos x}=\frac{\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2}}{(\sin^2 x+2x\sin x\cos x)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{1+x^2}\right)}=\frac{\frac{3+x^2}{(1-x^2)(1+x^2)^2}}{\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+2\frac{\sin x}{x}\cos x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{1+x^2}\right)}$$

Limitin Temel özelliği ve Limit Teoremlerinden:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3+x^2}{(1-x^2)(1+x^2)^2}}{\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+2\frac{\sin x}{x}\cos x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{1+x^2}\right)}=\frac{1}{2}\text{ bulunur.}$$

L'Hospital in Kuralından

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Arcsin}x-\operatorname{Arctan}x}{x\sin^2 x}=\frac{1}{2}\text{ bulunur.}$$

(b) $\cos\left(\frac{x}{y}\right)+x^2y=1$ Kapalı Türev alma yöntemi ile:

$$-\sin\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y-xy'}{y^2}\right)+2xy+x^2y'=0$$

$$y'\left(x^2+\frac{x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)=\frac{1}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)-2xy\text{ den }y'=\frac{\frac{1}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)-2xy}{x^2+\frac{x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right)}$$

3. (a) **Düşey Asimptotlar:** fonksiyon $x\neq\pm1$ için süreklidir.

$x=-1$ de $\frac{0}{0}$ belirisizliği var. L'Hospital in Kuralı kullanılarak (veya kullanmadan) $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{2x+1}-x}{x^2-1}=\frac{1}{6}$ bulunur. $x=-1$ de düşey asimptot yoktur. $\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{2x+1}-x}=0$ ve 1 in hemen sağında (tam olarak: $1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ için) $\frac{\sqrt[3]{2x+1}-x}{x^2-1}>0$ olduğundan, $\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt[3]{2x+1}-x}{x^2-1}=+\infty$ olur $x=1$ de düşey asimptot vardır. **Yatay Asimptot:** $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{2x+1}-x}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-1}{x-\frac{1}{x}}=0$ olduğu için $y=0$ doğrusu biricik yatay asimtottur.(Başka bir asimptot da olamaz.)

(b) $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\ln x}$ limitinde ∞^0 belirsizliği var. $\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\ln x} = -\ln x \ln(x-1)$ olur. Burada da ($x \to 1^+$ iken) $0\cdot\infty$ belirsizliği vardır. $\lim_{x\to 1^+} -\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}$ limitinde $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var. L'Hospital in Kuralını uygulayayalım.

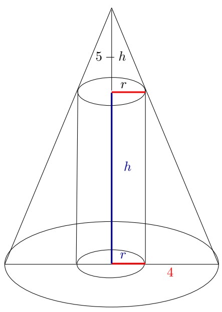
$$\lim_{x\to 1^+} -\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}} = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) x\ln x = 1\cdot 1\cdot 0 = 0 \text{ (Parantez içindeki limitin 1 oluşu bir teorem idi)}$$

($\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1} = 1$ olduğu L'Hospital'in Kuralı ile de görülebilir.) L'Hospital in Kuralından, $\lim_{x\to 1^+}\ln\left(\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\ln x}\right) = 0$ olur. $\lim_{x\to 1^+}\ln\left(\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\ln x}\right) = 0$ ve exp, 0 da sürekli olduğundan, Bileşkenin limiti teoreminden

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{\ln x} = \exp(0) = 1 \text{ olur}$$

4. (a) $\tan(\operatorname{Arcsin} x) = \frac{\sin(\operatorname{Arcsin} x)}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)} = \frac{x}{\cos(\operatorname{Arcsin} x)}$ olur. $\operatorname{Arcsin} x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ve bu aralıkta cos fonksiyonunun değerleri negatif olmadığı (ve $\cos^2(\operatorname{Arcsin} x) + \sin^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1$ olduğu) için, $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$ olur . Dolayısıyla, $\tan(\operatorname{Arcsin} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ olur.

(b) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $a = 16$ olsun. $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$, $f''(x) = -\frac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}}$, $f'''(x) = \frac{21}{64}x^{-\frac{11}{4}}$.
$P_3(x) = 2 + \frac{\frac{1}{2^5}}{1!}(x-16) + \frac{-\frac{3}{2^{11}}}{2!}(x-16)^2 + \frac{\frac{21}{2^{17}}}{3!}(x-16)^3$
$\sqrt[4]{15} = f(15) \approx P_3(15) = 2 - \frac{1}{2^5} - \frac{3}{2^{12}} - \frac{7}{2^{18}}$ bulunur.
Kalanlı Taylor Teoreminden, Hata$= |R_3| = \left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(15-16)^4\right|$ olacak şekilde bir $15 < c < 16$ sayısı vardır. $f^{(4)}(c) = -\frac{231}{256c^{\frac{15}{4}}}$ dir. $c > 15 > 2^3$ olduğu için $c^{\frac{15}{4}} > (2^3)^{\frac{15}{4}} > 2^{11}$ olur. Tüm bunlar yerine konduğunda, Hata$< \frac{77}{2^{22}}$ elde edilir.

5. 

Silindirin hacmi maksimum yapılacak. Silindirin hacmi$=V = \pi r^2 h$. Benzer üçgenlerden, $\frac{5-h}{5} = \frac{r}{4}$ Bu eşitlikten, $h = 5 - \frac{5r}{4}$ bulunur. Yerine konulduğunda: $V = \frac{5\pi}{4}(4r^2 - r^3)$ maksimum yapılacak. Değişkenin değer alabileceği aralık:$(0,4)$ Yani, $f(r) = \frac{5\pi}{4}(4r^2 - r^3)$, $(0,4)$ aralığında maksimum yapılacak. $f'(r) = \frac{5\pi}{4}(8r - 3r^2)$ olur.

Bu fonksiyonun $(0,4)$ aralığındaki biricik kritik sayısı $r = \frac{8}{3}$ dür.

	0		$\frac{8}{3}$		4
$f'(r)$	|	$+$	|	$-$	|
	|	$\nearrow$	|	$\searrow$	|

oluşundan (ve f nin $\frac{8}{3}$ de sürekli oluşundan, f, $(0,4)$ aralığındaki maksimum değerine $r = \frac{8}{3}$ de erişir. Daha sonra da $h = \frac{5}{3}$ bulunur.