MT 131 ANALİZ I

DÖNEM SONU SINAVI ÇÖZÜMLER

1. (a) Birinci Çözüm: Her $x \in [-1,+1]$ için $f(x) = \text{Arccos}(-x) + \text{Arccos}\, x$ olsun. f bu aralıkta sürekli ve iç noktalarda türevlenebilirdir. (Tüm iç noktalarda) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}}(-1) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ olduğundan Ortalama Değer teoreminin bir sonucu olarak f, $[-1,+1]$ aralığında sabittir. $f(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ olduğundan bu sabitin değeri π dir. Dolayısıyla, her $x \in [-1,+1]$ için $\text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos}\, x$ olduğu gösterilmiş olur.

   (b) İkinci Çözüm: $x \in [-1,+1]$ olsun. $\text{Arccos}\, x \in [0,\pi]$ olduğundan $y = \pi - \text{Arccos}\, x \in [0,\pi]$ olur. Ayrıca $\cos y = \cos(\pi - \text{Arccos}\, x) = \cos\pi \cdot \cos(\text{Arccos}\, x) - \sin\pi \cdot \sin(\text{Arccos}\, x) = -x$ olur. Dolayısıyla, Arccos fonksiyonunun tanım gereği, $\text{Arccos}(-x) = y = \pi - \text{Arccos}\, x$ olur.

   (c) Üçüncü Çözüm: Derste , her $x \in [-1,+1]$ için $\text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}$ olduğu ve Arcsin fonksiyonunun tek fonksiyon olduğu gösterildi. Bu ikisini kulanarak:

$$\text{Arccos}(-x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(-x) = \frac{\pi}{2} + \text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arccos}\, x\right) = \pi - \text{Arccos}\, x$$

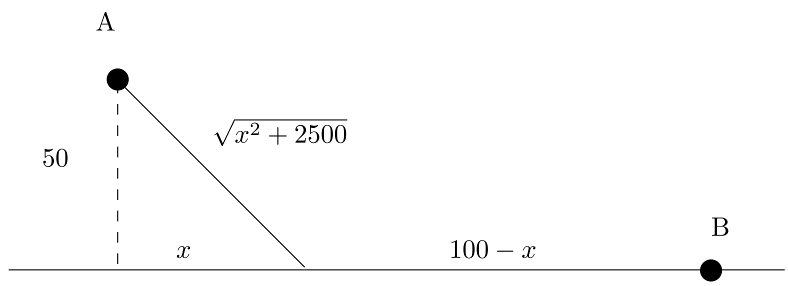
2. $f(x) = \sinh x,\ a = 0,\ b = \frac{1}{3},\ n = 4$ olsun. f tüm $\mathbb{R}$ de istendiği kadar türevlenebilirdir. Kalanlı Taylor Teoreminden $\sinh\frac{1}{3} = P_4(\frac{1}{3}) + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(\frac{1}{3} - 0)^5$ olacak şekilde 0 ile $\frac{1}{3}$ arasında bir c sayısı vardır. $f(0) = f''(0) = f''''(0) = 0,\ f'(0) = f'''(0) = 1$ olduğundan $P_4(x) = x + \frac{x^3}{6}$ olur. $\sinh\frac{1}{3} \approx P_4(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{162}$ ve Hata$=\left|\frac{f^{(5)}(c)}{5!}(\frac{1}{3} - 0)^5\right| = \frac{\cosh c}{3^5\, 5!}$ olur. $0 < c < \frac{1}{3} < 1$ ve cosh fonksiyonu $[0,+\infty)$ de kesin artan olduğundan $\cosh c < \cosh\frac{1}{3} < \cosh 1 = \frac{e+\frac{1}{e}}{2} < \frac{7}{4}$ elde edilir. Dolayısıyla Hata$< \frac{7}{4\times 5!\times 3^5}$ olur.

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L < 0$ olduğundan limit ile ilgili bir teorem gereği a yı içeren bir I açık aralığında (belki a dışında) $f(x) < 0$ olur. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ olduğundan (bizim kullandığımız sonsuz limit tanımına göre) $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = 0$ ve a yı içeren bir J açık aralığında (belki a dışında) $g(x) < 0$ olur. $I \cap J$, a yı içeren bir açık aralıktır ve bu aralıkta (belki a dışında) $f(x)g(x) > 0$ ve (**SONLU Limitler için Limit Teoreminden**) $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}\cdot 0 = 0$ olur. Bunlar da (bizim kullandığımız tanıma göre) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$ olması koşullarıdır.

4. Ters Fonksiyonun Türevlenebilmesi Teoreminden, ($b = f(a)$ olmak üzere) $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ dır. $\sin x - \cos(x^2) = -1$ denkleminin bu aralıkta çözümü $x = 0$ olduğu kolayca görülür.$f'(x) = \cos x + 2x\sin(x^2)$ olduğundan $g'(-1) = \frac{1}{f'(0)} = 1$ bulunur.

5. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$, $(0,+\infty)$ aralığında tanımlı ve sürekli olduğundan, $x = 0$ dışında düşey asimptot var olamaz. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\,\dfrac{1}{x^3} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$ olduğundan ($\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^3} = \lim\limits_{t\to+\infty} t^3 = +\infty$ olduğu derste gösterildi) $x = 0$ da bir düşey asimptot vardır. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{ için L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3x^3} = 0$ olduğundan $y = 0$ (x-ekseni) yatay asimptottur. $f'(x) = \dfrac{1 - 3\ln x}{x^4}$ Kritik Sayı:$x = \sqrt[3]{e}$, $f''(x) = \dfrac{12\ln x - 7}{x^5} = 0$ için $x = e^{\frac{7}{12}}$

		0		$e^{\frac{1}{3}}$		$e^{\frac{7}{12}}$	
$f'(x)$			$+$		$-$		$-$
$f''(x)$			$+$		$+$		$-$
Grafik				Yerel Maks		Büküm Noktası	

6. 

Hedefe ulaşmak için geçen zaman= Yüzme zamanı+ Koşma zamanı=$\dfrac{\sqrt{x^2+2500}}{25}+\dfrac{100-x}{50}$ ($x \le 100$ iken)

$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+2500}}{25}+\frac{100-x}{50}$ fonksiyonu minimum yapılacak. $[0,100]$ aralığındaki x değerlerini düşünmek yeterlidir.

$f'(x)=\frac{x}{25\sqrt{x^2+2500}}-\frac{1}{50}=\frac{3x^2-2500}{50\sqrt{x^2+2500}\,(2x+\sqrt{x^2+2500})}=0$, $[0,100]$ aralığındaki yegane kritik sayı $x=\frac{50}{\sqrt{3}}$ bulunur. $[0,100]$ aralığında (türevin paydası) $50\sqrt{x^2+2500}\,(2x+\sqrt{x^2+2500})>0$ olduğundan, bu aralıkta $f'(x)$ in işareti $3x^2-2500$ in işareti ile aynıdır.

	0		$\frac{50}{\sqrt{3}}$		100
$f'(x)$		$-$		$+$	

Dolayısıyla f, $[0,100]$ aralığındaki minimum değerine $x=\frac{50}{\sqrt{3}}$ de erişir. Kişinin, A noktasından B noktasına en kısa zamanda varması için $\sqrt{\frac{2500}{3}+2500}=\frac{100}{\sqrt{3}}$ metre yüzmesi ve $100-\frac{50}{\sqrt{3}}$ metre koşması gerekir.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{\operatorname{Arctan} x-\operatorname{Arcsin} x}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği bulunmaktadır. L'Hospital Kuralı ile çözmeyi deneyelim:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+x\sin x}{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ limitinde yine $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

(a) Birinci Çözüm: $\dfrac{1-\cos x+x\sin x}{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\dfrac{(1-\cos x+x\sin x)\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}$ ve

$\dfrac{1-\cos x+x\sin x}{\frac{1}{(1+x^2)^2}-\frac{1}{1-x^2}}=-\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{\sin x}{x}\right)\dfrac{(1-x^2)(1+x^2)^2}{3+4x}$ ve $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ olduğundan

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x\sin x}{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\sin x}{x}\right)\frac{(1-x^2)(1+x^2)^2}{3+4x}\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=-1$$

(b) İkinci Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x+x\cos x}{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}-\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\frac{\sin x}{x}-\cos x}{2(1+x^2)^{-2}+(1-x^2)^{-3/2}}=-1$ olur.

L'Hospital Kuralından $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+x\sin x}{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=-1$ olur.

L'Hospital Kuralından $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{\operatorname{Arctan} x-\operatorname{Arcsin} x}=-1$ olur.

8. (a) Birinci Çözüm: $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\sin\dfrac{1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sin\frac{t^2}{(t-1)^2}}{t^2}$ dir. Bu limitte $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\cos\left(\frac{t^2}{(t-1)^2}\right)\frac{-2t}{(t-1)^3}}{2t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{-\cos\left(\frac{t^2}{(t-1)^2}\right)}{(t-1)^3}=\dfrac{-1}{-1}=1$ olur. L'Hospital Kuralından $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sin\frac{t^2}{(t-1)^2}}{t^2}=1$ dolayısıyla $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\sin\dfrac{1}{(x-1)^2}=1$ bulunur.

(b) İkinci Çözüm: $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\sin\dfrac{1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{(x-1)^2}}{\frac{1}{x^2}}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\cos\frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{-2}{(x-1)^3}\right)}{\frac{-2}{x^3}}=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^3\cos\frac{1}{(x-1)^2}=1\cdot 1=1.$$

L'Hospital Kuralından $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\sin\dfrac{1}{(x-1)^2}=1$ elde edilir.

(c) Üçüncü Çözüm: $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2\sin\dfrac{1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sin\frac{t^2}{(t-1)^2}}{t^2}$ dir. $s=\frac{t^2}{(t-1)^2}$ olsun. $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t^2}{(t-1)^2}=0$ ve $t>0$ için $s>0$ olur. ($t>0$ olacağına dikkat edilerek) $t^2=\frac{s}{(\sqrt{s}+1)^2}$ bulunur.

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{\sin s}{\frac{s}{(\sqrt{s}+1)^2}}=\lim_{s\to 0^+}\frac{\sin s}{s}(\sqrt{s}+1)^2=1$$

olduğundan Limitler için Değişken Değiştirme Teoreminden

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \sin\frac{1}{(x-1)^2} = 1$$

bulunur.

9. $\lim\limits_{x\to 0^+} |\ln x|^{\ln(x+1)}$ limitinde ∞^0 belirsizliği vardır.
$\ln\left(|\ln x|^{\ln(x+1)}\right) = \ln(x+1)\,\ln|\ln x| = \dfrac{\ln|\ln x|}{\frac{1}{\ln(x+1)}}$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln|\ln x|}{\frac{1}{\ln(x+1)}}$ limitinde $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x\ln x}}{\frac{-1}{(x+1)(\ln(x+1))^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{(x+1)(\ln(x+1))^2}{x\,\ln x} \overset{\frac{0}{0}\text{ için L'Hospital}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{(\ln(x+1))^2 + 2\ln(x+1)}{1+\ln x} = -\dfrac{0}{-\infty} = 0$ bulunur.
L'Hospital Kuralından $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x+1)\,\ln|\ln x| = 0$ olur.
exp fonksiyonu 0 da sürekli olduğundan, Bileşkenin Limiti Teoreminden
$\lim\limits_{x\to 0^+} |\ln x|^{\ln(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \exp(\ln(x+1)\,\ln|\ln x|) = \exp(0) = 1$ olur.