MT 131 DÖNEM SONU (2010) SINAVI ÇÖZÜMLER

1. (a) $f(x) = \cosh x,\ a = 0$ olsun. $f(0) = \cosh 0 = 1,\ f'(0) = \sinh 0 = 0,\ f''(0) = \cosh 0 = 1,\ f'''(0) = \sinh 0 = 0$ ve $P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$, $\quad \cosh\frac{1}{2} \approx P_3(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$ olur. Hata$=|R_3|$ olduğundan Kalanlı Taylor Teoreminden (0 ile $\frac{1}{2}$ arasında bir c için)

Hata$=\left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(\frac{1}{2}-0)^4\right| = \frac{\cosh c}{384}$, $\cosh c < \cosh\frac{1}{2} < \cosh 1 = \frac{e+e^{-1}}{2} < \frac{3+\frac{1}{2}}{2} = \frac{7}{4}$ olduğundan:

Hata$< \frac{7}{1536}$ bulunur. (Veya $\cosh\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{e}+\frac{1}{\sqrt{e}}}{2} < \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ den Hata$< \frac{1}{256}$)

(b) (0 ile $\frac{1}{2}$ arasında bir c için) $R_n = \begin{cases} \frac{\sinh c}{2^{n+1}(n+1)!} & n \text{ çift ise} \\ \frac{\cosh c}{2^{n+1}(n+1)!} & n \text{ tek ise} \end{cases}$ ve $0 < \sinh c < \cosh c < \cosh\frac{1}{2} < \frac{7}{4}$ olduğundan Hata$< \frac{7}{2^{n+3}(n+1)!}$ olur. $\frac{7}{2^{n+3}(n+1)!} < 10^{-4}$ (eşdeğer olarak $2^{n+3}(n+1)! > 70000$) olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ seçmeliyiz. $n \geq 5$ için bu eşitsizliğin sağlandığı (deneyerek) görülür.

2. Kapalı türev alma yöntemi ile: $y' = \frac{y-6x^2}{3y^2-x}$ bulunur. $y' = 0$ ancak $y = 6x^2$ iken olur. Bu da denklemde yerine konursa $54x^6 - x^3 - 13 = 0$ olur. Bu denklemden $x = \sqrt[3]{\frac{1\pm\sqrt{1+54\cdot 52}}{108}} = \sqrt[3]{\frac{1\pm 53}{108}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{\sqrt[3]{13}}{3}$ bulunur $a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ yi alalım, $y = 6a^2 = \frac{6}{\sqrt[3]{4}}$ olur, türev alma kuralları ile $y'' = \frac{(y'-12x)(3y^2-x)-(y-6x^2)(6yy'-1)}{(3y^2-x)^2}$ olur. $a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ve $b = \frac{6}{\sqrt[3]{4}}$ değerleri için ($y' = 0,\ b - 6a^2 = 0,\ a > 0,\ 3b^2 - a > 0$ olduğundan)

$y'' = \frac{-12a}{3b^2-a} < 0$ olur. Dolayısıyla f, $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ de bir yerel maksimuma erişir.

3. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$, $D_f = [0,1) \bigcup (1,+\infty)$ ve f sürekli fonksiyon olduğundan $x = 1$ dışında düşey asimptotu olamaz. $x > 1$ için $f(x) > 0$ ve $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x} = 0$ olduğundan $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\sqrt{x}-1} = +\infty$ olur. $x = 1$, f için yegane düşey asimptotdur. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}} = +\infty$ olduğundan yatay asimptot yoktur.

$f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2} = 0$. $x = 4$ yegane kritik sayı. $f''(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^3} = 0, x = 9$

	$0<x<1$	$1<x<4$	$4<x<9$	$9<x<+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$

f, 4 da sürekli olduğundan, I. türev testinden, f, 4 de bir yerel minimuma erişir.

f, 9 da türevlenebildiği için, 9 da bir büküm noktasına sahiptir.

(f, 1 de tanımsız olduğundan büküm noktası yoktur.)

4. (a) $y = \operatorname{Arctan} x$ olsun. $x \geq 0$ olduğu için $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ olur. $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$ ve $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\sec y > 0$ olur, dolayısıyla $\sec y = \sqrt{1+x^2}$ olur. $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\operatorname{Sec} y = \sec y = \sqrt{1+x^2}$, dolayısıyla $\operatorname{Arctan} x = y = \operatorname{Arcsec}\sqrt{1+x^2}$ olur.

(b) $y = \operatorname{cosech}^{-1} x$ olsun. $x = \operatorname{cosech} y = \frac{1}{\sinh y} = \frac{2}{e^y - e^{-y}}$ olur. Bu da $e^y - e^{-y} - \frac{2}{x} = 0$ eşdeğer olarak $(e^y)^2 - \frac{2}{x}e^y - 1 = 0$ $e^y = \frac{1}{x} \pm \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$, $e^y > 0$ ve $\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} < 0$ olduğundan $e^y = \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$, dolayısıyla $y = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$, dolayısıyla $\operatorname{cosech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)$ olur.

5. (a) 1^∞ belirsizliği vardır. $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ olsun. $\ln f(x) = \dfrac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$ olur. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\frac{2x}{1+x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1+x^2}{2\cos x}\right)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{-1}{2}\cdot 1 = \dfrac{-1}{2}$. L'Hospital Kuralından $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)} = -\dfrac{1}{2}$ olur. e^x, $-\frac{1}{2}$ de sürekli olduğundan (bileşkenin limiti ile ilgili teoremden), $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)}} = e^{-\frac{1}{2}}$ olur.

(b) $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2\cos\frac{1}{x}}(2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2\cos\frac{1}{x}}(2x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x}) = +\infty(+\infty+1) = +\infty$$

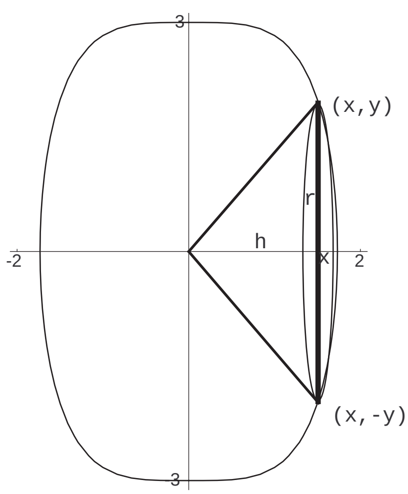
(cos, 0 da sürekli olduğundan, $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\dfrac{1}{x} = \cos 0 = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cos\dfrac{1}{x} = +\infty\cdot 1 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^2\cos\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sin t}{t} = 1$)

olduğundan L'Hospital Kuralından $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2\cos\frac{1}{x}}}{\ln x} = +\infty$ olur.

L'Hospital Kuralı Kullanmadan Çözüm:

$x > 1$ için $0 < \ln x \le x-1$ ve $e^{x^2\cos\frac{1}{x}} \ge 1 + x^2\cos\frac{1}{x} > x^2\cos 1$ olduğundan ($x > 1$ için) $0 \le \frac{\ln x}{e^{x^2\cos\frac{1}{x}}} \le \frac{x-1}{x^2\cos 1}$ olur. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x^2\cos 1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\cos 1} = \dfrac{0}{\cos 1} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty}0$ olduğundan, Sıkıştırma Teoreminden, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{e^{x^2\cos\frac{1}{x}}} = 0$ olur, $x > 1$ için $\dfrac{e^{x^2\cos\frac{1}{x}}}{\ln x} > 0$ olduğundan,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2\cos\frac{1}{x}}}{\ln x} = +\infty$ elde edilir.



6. (Eğri y-eksenine göre simetrik olduğundan üçgenin tabanı y-ekseninin sağında varsayılabilir.) Koninin Hacmi$=\frac{\pi}{3}r^2h$ maksimum yapılacak.

(Yukarıdaki şekilden) $r = y$, $h = x$ olduğundan

$\frac{\pi}{3}y^2x$ maksimum yapılacak.

(x, y) eğri üzerinde olduğundan $x^4 + y^2 = 9$ olur. Dolayısıyla $y^2 = 9 - x^4$ olur.

$f(x) = \frac{\pi}{3}(9x - x^5)$ Maksimum yapılacak.

$0 < x < \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$ olmalıdır. $f(x) = \frac{\pi}{3}(9x - x^5)$, $(0, \sqrt{3})$ aralığında maksimum yapılacak.

f, 0 ve $\sqrt{3}$ da tanımlı ve sürekli ve $f(0) = f(\sqrt{3}) = 0$ ve içte (sürekli ve) $f(x) > 0$ olduğundan

f, $[0, \sqrt{3}]$ aralığında (Maksimum-minimum Teoremi dolayısıyla erişeceği) maksimum değerine bir iç noktada erişir. İç Ekstremum Teoreminden, bu maksimuma bir kritik sayıda erişir. $f'(x) = \frac{\pi}{3}(9 - 5x^4)$ olduğundan $(0, \sqrt{3})$ aralığındaki yegane kritik sayı $x = \sqrt[4]{\frac{9}{5}}$ dir. Dolayısıyla maksimum hacim $x = \sqrt[4]{\frac{9}{5}}$ için elde edilir. Dolayısıyla en büyük koninin hacmi$=\frac{\pi}{3}\left(9\sqrt[4]{\frac{9}{5}} - \left(\sqrt[4]{\frac{9}{5}}\right)^5\right) = \frac{12\pi}{5}\sqrt[4]{\frac{9}{5}}$ olur.