MT 131 Analiz I
FİNAL SINAVI Çözümler

1. (a) $f(x) = x^{8/3} - x^{2/3}$, $[-1, +1]$ aralığında sürekli olduğundan, Maksimum-Minimum Teoreminden, bu aralıkta maksimum ve minimum değerlerine erişir. İç Ekstremum teoreminden, $f$ bu değerlere ya bir iç kritik sayıda ya da bir uç noktasında erişir. $f'(x) = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}(4x^2 - 1)$. kritik sayılar:0;$\pm\frac{1}{2}$ dir. $f(\pm 1) = f(0) = 0$, $f(\pm\frac{1}{2}) < 0$ olduğundan maksimum değeri=0 ve minimum değeri=$f(\pm\frac{1}{2}) = \frac{-3}{4\sqrt[3]{4}}$ dir.

   (b) $0^0$ belirsizliği. $y = (\sin x)^{1-\cos x}$ olsun. $\ln y = (1-\cos x)\ln\sin x = \frac{\ln\sin x}{\frac{1}{1-\cos x}}$, $\frac{0}{0}$ belirsizliği var

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x(1-\cos x)^2}{-\sin^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x(1-\cos x)^2(1+\cos x)}{-\sin^2 x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\cos x(1-\cos x)}{1+\cos x} = 0$$

olur. L'Hospital Kuralından $\lim_{x\to 0^+}(1-\cos x)\ln\sin x = 0$ olur ve ($e^x, 0$ da sürekli olduğundan) $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{1-\cos x} = \lim_{x\to 0^+} e^{(1-\cos x)\ln\sin x} = e^0 = 1$ olur.

2. (Bölerek) $\frac{x^4+1}{x^2-1} = x^2 + 1 + \frac{2}{x^2-1}$ olduğundan $y = x^2 + 1$ bu rasyonel fonksiyonun düşey olmayan tek asimptotudur. $f'(x) = \frac{2x(x^4-2x^2-1)}{(x^2-1)^2}$ olduğundan kritik sayılar :0, $\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$

| | $x<-\sqrt{1+\sqrt{2}}$ | $-\sqrt{1+\sqrt{2}}<x<-1$ | $-1 < x < 0$ | $0 < x < 1$ | $1<x<\sqrt{1+\sqrt{2}}$ | $x>\sqrt{1+\sqrt{2}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

$f$, $0, \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$ de sürekli olduğundan, I. Türev testinden, $f$, 0 da yerel maksimuma, $\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$ de yerel minimuma erişir.

3. (a) $\lim_{x\to+\infty} x^{\sin\frac{1}{x}}$, $\infty^0$ belirsizliği var. $\ln(x^{\sin\frac{1}{x}}) = \sin\frac{1}{x}\ln x$, $\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\ln x = \lim_{t\to 0^+}\frac{-\ln t}{\frac{1}{\sin t}}$, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var. $\lim_{t\to 0^+}\frac{-\frac{1}{t}}{-\frac{\cos t}{\sin^2 t}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin^2 t}{t\cos t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}\frac{\sin t}{\cos t} = 0$. L'Hospital Kuralından dolayı $\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\ln x = 0$ olur. $e^x$, 0 da sürekli olduğundan, (bileşkenin limiti teoreminden) $\lim_{x\to+\infty} x^{\sin\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ olur.

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sinh^{-1}x}{\ln(x^2+1)}$, $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{2x}{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2} = -\frac{1}{2}$ L'Hospital Kuralından dolayı $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sinh^{-1}x}{\ln(x^2+1)} = -\frac{1}{2}$ olur.

4. (a) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ olsun.

      i. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = 0$ ve $a$ yı içeren bir açık aralıkta belki $a$ dışında $f(x) > 0$

      ii. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = 0$ ve $a$ yı içeren bir açık aralıkta belki $a$ dışında $g(x) > 0$

   (Bu aralıkların arakesiti olan açık aralıkta, belki $a$ dışında) $0 < f(x) < f(x) + g(x)$ olduğundan (aynı kümede) $0 < \frac{1}{f(x)+g(x)} < \frac{1}{f(x)}$ dir. $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = 0 = \lim_{x\to a} 0$ olduğundan Sandviç (Sıkıştırma) Teoreminden $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)+g(x)} = 0$ olur. Aynı kümede $f(x) + g(x) > 0$ ve $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)+g(x)} = 0$ olduğundan $\displaystyle\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$ olur.

   (b) i. Birinci Çözüm:$f(x) = \text{Arccos}(-x)$, $g(x) = \pi - \text{Arccos}\, x$ olsun. $f$ ve $g$, $[-1, 1]$ aralığında sürekli ve $(-1, 1)$ aralığında türevlenebilirdir. Her $x \in (-1, 1)$ için

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = g'(x)$ olduğundan ODT nin sonucu olarak $[-1,1]$ aralığında $f(x) - g(x)$ bir sabittir. $f(0) = g(0) = \frac{\pi}{2}$ olduğundan bu sabit 0 dır ve $[-1,1]$ aralığında $f(x) = g(x)$ olur.

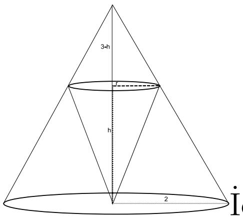
ii. İkinci Çözüm: Her $x \in [-1,1]$ için ($0 \leq \operatorname{Arccos} x \leq \pi$ olduğundan) $0 \leq \pi - \operatorname{Arccos} x \leq \pi$ olur.
$\operatorname{Cos}(\pi - \operatorname{Arccos} x) = \cos(\pi - \operatorname{Arccos} x) = -\cos(\operatorname{Arccos} x) = -x$ olur. Dolayısıyla

$$\operatorname{Arccos}(-x) = \operatorname{Cos}^{-1}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos} x$$

olur.

iii. Üçüncü Çözüm: (Derste ispatlanan her $x \in [-1,1]$ için $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$ ve $\operatorname{Arcsin} x$ in tek fonksiyon olduğunu kullanarak)

$$\operatorname{Arccos}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}(-x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos}(x) = \pi - \operatorname{Arccos} x$$

5. 

İçteki koninin hacmı maksimum yapılacak. Hacım=$\frac{1}{3}\pi r^2 h$ maksimum yapılacak. Benzer üçgenlerden $\frac{r}{2} = \frac{3-h}{3}$ , $3r + 2h = 6$ olur. $h = 3 - \frac{3r}{2}$. Hacım formülünde yerine yazılırsa:
$V = V(r) = \frac{\pi}{2}(2r^2 - r^3)$ Maksimum yapılacak.
$0 < r < 2$ olmalıdır. $V = V(r) = \frac{\pi}{2}(2r^2 - r^3)$, $(0,2)$ aralığında maksimum yapılacak.
$V'(r) = \frac{\pi}{2} r(4 - 3r)$ Kritik sayılar:0, $\frac{4}{3}$. $(0,2)$ aralığındaki yegane kritik sayı $\frac{4}{3}$.

| | $0 < r < \frac{4}{3}$ | $\frac{4}{3} < r < 2$ |
|---|---|---|
| $V'(r)$ | $+$ | $-$ |
| $V(r)$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |

$V$, $\frac{4}{3}$ de sürekli olduğundan $V$, $(0,2)$ aralığında maksimum değerine $\frac{4}{3}$ de oluşur. $h = 1$ bulunur.