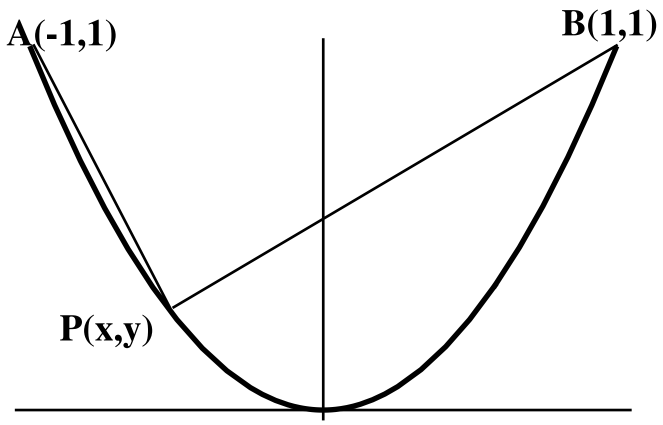
MT 131

Dönem Sonu Sınavı

ÇÖZÜMLER

1. $y = x^2$ parabolu üzerindeki bir nokta $P(x, y)$ olsun.



$|PA|^2 + |PB|^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2$ minimum yapılacak

$y = x^2$ olduğundan
$f(x) = (x+1)^2 + (x^2-1)^2 + (x-1)^2 + (x^2-1)^2$ minimum yapılacak.

$\mathbb{R}$ aralığında $f(x)$ minimum yapılacak

$f(x) = 2(x^4 - x^2 + 2)$ $\mathbb{R}$ de minimum yapılacak.

$$f'(x) = 2(4x^3 - 2x) = 4x(2x^2 - 1)$$

Kritik Sayılar:0, $\dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}}$

Aralık	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$	$(0, +\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(+\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

f bu kritik sayılarda süreklidir ve $f(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}) = \frac{7}{2}$ f nin minimum değeridir.

2. (a) $x > 1$ için $(1-x^5) < 0$ ve $\lim_{x\to 1^+} 1-x^5 = 0$ olduğundan $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x^5} = -\infty$ olur. Dolayısıyla $x = 1$ düşey asimptottur. $x \neq 1$ için $f(x)$ sürekli olduğundan başka düşey asimptot yoktur. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-x^5} = \frac{1}{\mp\infty} = 0$ olduğundan $y = 0$ yegane düşey olmayan asimptottur.(Yatay asimptottur)
$f'(x) = \frac{5x^4}{(1-x^5)^2}$ olduğundan 0 yegane kritik sayıdır.

Aralık	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

f, 0 da sürekli olduğundan (I. Türev testinden) orada yerel ektremum yoktur. $f''(x) = \frac{10x^3(2+3x^5)}{(1-x^5)^3}$ İkinci türevin kökleri veya tanımsız olduğu (ama f nin tanımlı ve türeve sahip olduğu) sayılar: $0, \sqrt[5]{\frac{-2}{3}}$

Aralık	$(-\infty, \sqrt[5]{\frac{-2}{3}})$	$(\sqrt[5]{\frac{-2}{3}}, 0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\smile$	$\frown$	$\smile$	$\frown$

Bu tablodan f nin 0 ve $\sqrt[5]{\frac{-2}{3}}$ de büküm noktalarına sahip olduğunu görürüz.$f(0) = 1,\ f(\sqrt[5]{\frac{-2}{3}}) = \frac{3}{5}$ olduğundan

$(0,1)$ ve $(\sqrt[5]{\frac{-2}{3}}, \frac{3}{5})$ büküm noktalarıdır.

(b) ∞^0 belirsizliği vardır. $f(x) = (1+\cosh x)^{\frac{1}{x}}$ olsun. $\ln f(x) = \frac{\ln(1+\cosh x)}{x}$ olur. $\lim_{x\to\infty} \ln f(x)$ de $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. L'Hospital kuralı kullanabiliriz.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sinh x}{1+\cosh x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{1+\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2+e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+2e^{-x}+e^{-2x}} = 1$$

bulunur. L'Hospital kuralından

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\cosh x)}{x} = 1$$

elde edilir. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to\infty} \ln f(x)} = e^1 = e$ olur.

3. (a) Ters fonksiyonun türevlenebilmesi teoreminden g türevlenebilirdir ve

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

dir. Her iki tarafın türevi alınarak

$$g''(f(x))f'(x) = \frac{-f''(x)}{(f'(x))^2}$$

bulunur. Yeniden düzenlenerek $(f'(x)) \neq 0$ olduğundan)

$$g''(f(x)) = \frac{-f''(x)}{(f'(x))^3}$$

elde edilir. $x = a$ yazılırsa

$$g''(f(a)) = \frac{-f''(a)}{(f'(a))^3} = 0$$

bulunur.

(b) $\frac{0}{0}$ belirsizliği var olduğundan L'Hospital kuralını kullanabiliriz.
$\dfrac{d}{dx}(\sinh^{-1} x^2) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$ ve $\dfrac{d}{dx}(\cosh x - 1) = \sinh x$ dir.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}}{\sinh x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sinh x} \frac{2}{\sqrt{x^4+1}}$$

dir. L'Hospital kuralı (veya türev tanımından)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sinh x} = \frac{1}{\cosh 0} = 1$$

bulunur.
$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{x^4+1}} = 2$ olduğu Limit teoremlerinden görülür. Buradan $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sinh x} \frac{2}{\sqrt{x^4+1}} = 2$ ve L'Hospital kuralından $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sinh^{-1} x^2}{\cosh x - 1} = 2$ olur.

4. (a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 2x - 5} - x$ limitinde $\infty - \infty$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned}
& \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 2x - 5} - x \\
= & \frac{x^3 - x^2 + 2x - 5 - x^3}{(\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 2x - 5})^2 + x\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 2x - 5} + x^2} \\
= & \frac{-x^2 + 2x - 5}{(\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 2x - 5})^2 + x\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 2x - 5} + x^2} \\
= & \frac{x^2(-1 + 2/x - 5/x^2)}{x^2(\sqrt[3]{(1 - 1/x + 2/x^2 - 5/x^3)^2} + \sqrt[3]{1 - 1/x + 2/x^2 - 5/x^3} + 1)} \\
= & \frac{-1 + 2/x - 5/x^2}{\sqrt[3]{(1 - 1/x + 2/x^2 - 5/x^3)^2} + \sqrt[3]{1 - 1/x + 2/x^2 - 5/x^3} + 1}
\end{aligned}$$

olduğundan Limit Teoremlerinden

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 2x - 5} - x \\
= & \lim_{x\to\infty} \frac{-1 + 2/x - 5/x^2}{\sqrt[3]{(1 - 1/x + 2/x^2 - 5/x^3)^2} + \sqrt[3]{1 - 1/x + 2/x^2 - 5/x^3} + 1} \\
= & \frac{-1}{3}
\end{aligned}$$

bulunur.

(b) i. $f(x) = e^x,\ a = 0, f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x$ olduğundan $f(a) = f'(a) = f''(a) = f'''(a) = 1$ dir. Buradan

$$P_3(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

olur.

$$\sqrt{e} = f(\frac{1}{2}) \approx P_3(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} = \frac{79}{48}$$

bulunur.

ii. $f(\dfrac{1}{2}) = P_3(\dfrac{1}{2})+R_3$ ve burada, bir $c \in (0, \frac{1}{2})$ için $R_3 = \dfrac{f''''(c)}{4!}(\dfrac{1}{2})^4 = \dfrac{e^c}{384}$ dir. $0 < e < 3$ ve e^x kesin artan olduğundan $0 < e^c < 3$ ve buradan Hata$= |R_3| < \frac{1}{128}$ elde edilir.

iii. Kalanlı Taylor Teoreminden her $n \in \mathbb{N}$ için $f(\dfrac{1}{2}) = P_n(\dfrac{1}{2}) + R_n$ olur. $|R_n| < 10^{-3}$ olacak şekilde bir n doğal sayısı bulmak gereklidir. Bir $c_n \in (0, \frac{1}{2})$ için $R_n = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{e^{c_n}}{2^{n+1}(n+1)!}$ olduğundan
Hata$= |R_n| < \frac{3}{2^{n+1}(n+1)!}$
elde edilir. $n = 4$ için ($\frac{5!2^5}{3} > 1000$ olduğundan) $|R_n| < 10^{-3}$ sağlanır. Dolayısıyla 10^{-3} den az bir hata ile
$\sqrt{e} \approx P_4(\frac{1}{2})$ olur.