Soru: Bir $\varepsilon > 0$ verilsin. $\sqrt{2}$ sayısını ε dan daha az bir hata ile yaklaşık hesaplayınız.

Çözüm: $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ açık aralığında, istendiği kadar (sonsuz kez) türevlenebilirdir. Dolayısıyla Kalanlı Taylor Teoreminden, her $n \in \mathbb{N}$ için, ($a = 1,\ b = 2$ alınarak) (n ye bağlı bir $c \in (1, 2)$ için)

$$\sqrt{2} = f(2) = P_n(2) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(2-1)^{n+1} = P_n(2) + R_n$$

olur. $n \geq 2$ için $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n}x^{\frac{1}{2}-n}$ bulunur. Dolayısıyla ($n \geq 1$ için)

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(2-1)^{n+1} = (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(n+1)!2^{n+1}c^{n+\frac{1}{2}}}$$

olur. $2^{n+1}(n+1)! = 2\cdot 4\cdots(2n+2)$ ve $1 < c < 2$ olduğundan $1 < c^{n+\frac{1}{2}} < 2^{n+\frac{1}{2}}$ nin sonucu olarak

$$|R_n| < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(n+1)!2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{(2n-1)}{2n}\frac{1}{2n+2} \leq \frac{1}{4n+4}$$

olur. Dolayısıyla $\frac{1}{4n+4} \leq \varepsilon$ (eşdeğer olarak $n \geq \frac{1}{4\varepsilon} - 1$) koşulunu sağlayan herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için ($\sqrt{2} \approx P_n(2)$ yaklaşık eşitliğinde) Hata$= |R_n| < \varepsilon$ olur.

Örneğin $\varepsilon = 10^{-2}$ için $n \geq 24$ (ilk eşitsizliğe daha dikkatli bakılırsa $n \geq 9$) almak yeterli olacaktır.

$P_9(x) = 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} - \frac{5(x-1)^4}{128} + \frac{7(x-1)^5}{256} - \frac{21(x-1)^6}{1024} + \frac{33(x-1)^7}{2048} - \frac{429(x-1)^8}{32768} + \frac{715(x-1)^9}{65536}$

olduğundan, 10^{-2} den az bir hata ile

$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{256} - \frac{21}{1024} + \frac{33}{2048} - \frac{429}{32768} + \frac{715}{65536}$